

La navigation astronomique

Éléments de base

De la trigonométrie sphérique



Peinture représentant la Pinta, la Santa Maria et la Nina.
[The Art Archive / Museo de la Torre del Oro Seville / Gianni Dagli Orti]

Patrick Balta-Wolber
2020

Chapitres

Introduction.....	5
Petit lexique	6
Christophe Colomb, son aventure, en 1492.....	7
La Méridienne	13
L'Angle au pôle	19
La droite de hauteur	22
Revenons sur les formules	30
L'azimut Z	40
Encore un peu de méridienne.....	42
Lever et coucher.....	45
Les méthodes sans calculette	46
Dieumegard et Bataille pour les azimuts	51
Les tables américaines HO-249	53
Méthode intermédiaire Balta.....	57
L'orthodromie	63
Application de la trigonométrie sphérique.....	67

Introduction

Cet ouvrage propose une manière d'appréhender les problèmes de trigonométrie sphérique appliquée à la navigation astronomique et finalement de comprendre comment s'articulent les formules données comme des recettes « magiques ».

Le fait de mieux visualiser les relations entre les côtés et les angles d'un triangle sphérique permet de revenir aux démarches intellectuelles et aux chemine-ments de la pensée aboutissant aux solutions que nous appliquons aujourd'hui.

Il y a d'autres manières de résoudre ces questions, mais je voulais inviter l'intéressé à entrer dans l'espace tridimensionnel.

Le GPS a relégué ces méthodes au musée, il est vrai. Il reste que si un jour vous posez les questions qui nous intéressent ici, vous trouverez, je l'espère, quelques réponses.

Il existe moult ouvrages traitant de la navigation astronomique avec une approche pratique nécessaire, utile et efficace. Il n'est pas donc pas indispensable de se plonger dans la géométrie pour l'utiliser en aveugle, pourvu que les réponses soient données à la fin d'une démarche mécanique.

Mais parfois, on désire « comprendre » un peu mieux.....

Petit lexique

– Point zénithal

Point, sur la sphère terrestre, où le navigateur relève la hauteur de l'astre observé à un angle de 90° . L'astre est exactement au zénith de ce point défini en longitude et en latitude à l'instant « t » donné dans les éphémérides nautiques.

– Angle au pôle

Degré de longitude, différence entre la longitude du méridien du point zénithal et le méridien de l'observateur

– Pôle élevé

Pôle de l'hémisphère dans lequel nous sommes.

Christophe Colomb, son aventure, en 1492...

À cette époque, on ne connaissait pas grand-chose, beaucoup moins qu'au temps des Grecs anciens et probablement des Arabes (à rechercher..).

Je lis sur internet que (auteur anonyme) :

« ... Aristote, au 4^e siècle av. J.-C., l'évaluait à 60 000 km, mais c'est Eratosthène (276-194 av. J.-C.), conservateur de la bibliothèque d'Alexandrie, qui l'évalua avec une extraordinaire précision.

Sa méthode est souvent citée comme modèle de la démarche scientifique des Grecs : il avait remarqué qu'au solstice d'été (le 21 juin), le Soleil tombait à la verticale dans un puits situé à Syène (aujourd'hui Assouan). Ceci n'arrivait pas à Alexandrie, où l'ombre d'un obélisque gardait, par rapport à la verticale, un angle de 7,2°. La Terre étant sphérique et Assouan étant au sud d'Alexandrie (pratiquement sur le même méridien), il suffisait de connaître la distance entre les deux villes pour en déduire le diamètre de la Terre. Ce que fit Eratosthène en comptant les pas des chameaux, aboutissant (malgré quelques erreurs, qui par chance se compensaient !) à une circonférence terrestre de 39375 km, toute proche de la réalité... »

La circonférence est en réalité de 40.000 km, l'erreur serait donc de 1%, ce qui est extraordinaire.

Les 40.000 km ne sont pas un hasard, ils découlent de la mesure de la longueur du méridien entre le pôle et l'équateur pendant la Révolution Française, soit $\frac{1}{4}$

de la circonférence de la Terre = 10.000 km, d'où la définition du mètre. Voir :

<https://www.lajauneetlarouge.com/la-merveilleuse-histoire-du-metre-premier-etalon-universel/?srsltid=AfmBOopgdn7jXvJh9aW16g0bP6gX8q4qHsJVCntz1Y-d30QrFK3YcaoU>

On savait donc déjà plusieurs siècles avant JC que la Terre est ronde avec sa dimension approximative mais très réaliste. Le fait de sa rotundité est donné au premier observateur venu depuis la nuit des temps : on remarque très nettement que les navires ou les sommets des îles "passent derrière l'horizon", ce que certains, les « Platistes », refusent de voir pour des raisons très étranges.

Revenons à Christophe Colomb. Le navigateur ne devait pas avoir la notion de la dimension de la terre, car au bout d'environ deux mois de navigation à une vitesse probable moyenne de trois nœuds, il devait déduire environ quelle distance était parcourue :

3 nœuds = 133 km en 24 heures.

$133 \times 60 \text{ jours} = 7980 \text{ km.}$ Ce qui est à peu près la distance en suivant les vents de l'Espagne jusqu'aux Bahamas, très très en dessous d'une vraie représentation terrestre.. qui aurait mené les équipages jusqu'aux Indes !

Les Indes, environ 78° Est ; L'Espagne, environ 8° Ouest. La différence de longitude est donc de 86° . Sur l'équateur en ligne droite cela représente $86 \times 60 \times 1,852 = 9556 \text{ km}$ à peu près pour un trajet vers l'Est.

Un trajet vers l'Ouest devait donc présenter une distance de : $40.000 - 9.556 = 30.444$ km, plus de trois fois la distance vers l'Est ! Si Colomb l'avait su, je doute qu'il serait parti dans les conditions que nous savons, sur des nefs de 18 à 25 mètres, pour un si gigantesque trajet ! À la vitesse moyenne de 3 nœuds, il aurait dû naviguer pendant 228 jours, presque huit mois dans l'inconnu. Ou bien était-il vraiment ignorant, ou bien était-il habité par une incommensurable inconscience !

Heureusement que l'Amérique les a tous sauvés ! Pourtant, pensaient-ils vraiment être arrivés aux Indes selon ce qu'on comprend, le nom des habitants est resté, n'est-ce pas ? Les Indiens... d'Amérique.

Le monde occidental s'était subitement agrandi, mais à quel prix !

*

Il existe toute une littérature sur l'art de naviguer des Polynésiens. Par exemple : ils suivaient une étoile pour retrouver une île perdue en plein Pacifique.

Là, il faut reconnaître que ce n'est pas très cohérent ! Les étoiles apparaissent le soir et disparaissent le matin en suivant un arc de cercle au-dessus de l'horizon. Pour être plus précis, elles tournent autour d'un pôle céleste, Nord ou Sud.

On imagine ce que « suivre une étoile » peut donner ! Ce sont là des histoires à dormir debout, comme celle des Rois Mages suivant une comète ! Tout cela relève de la plus absurde mystification.

Comment faisaient les Polynésiens pour retrouver des îles perdues au milieu de l'océan ?

On peut voir une étoile se lever et se coucher avec précision, c'est-à-dire que cette étoile est visible ou non visible selon la latitude à laquelle on se trouve.

Naviguant dans l'hémisphère Sud, on ne verra pas l'étoile Polaire (Polaris) sauf si on remonte vers le nord. À un moment précis de notre parcours, elle apparaîtra sur l'horizon ce qui nous permettra de déduire notre latitude avec précision sans utiliser le moindre instrument de mesure. Cela permet également de connaître la direction du Nord.

Polaris ne se trouve pas exactement au-dessus du pôle géographique et sa déclinaison varie très sensiblement avec le temps. Quoi qu'il en soit, elle ne restera donc pas toute la nuit exactement sur l'horizon selon notre latitude, son mouvement apparent sera celui d'un petit arc de cercle centré autour d'un point virtuel situé exactement au-dessus du pôle Nord géographique. Le raisonnement est le même pour la Croix du Sud ou pour une étoile proche du pôle Sud.

Le navigateur pouvait peut-être aussi observer une étoile précise et remarquer si elle passait sous l'horizon ou en l'affleurant plus ou moins lors de son circuit autour du pôle céleste.

Voilà des manières de se situer assez simplement en latitude.

Autre question : les Polynésiens ne disposaient pas de la boussole. Comment faisaient-ils pour tenir un cap 24 heures sur 24 ? La nuit avec un beau ciel, ils avaient un repère avec la position des étoiles proches des pôles célestes et pouvaient estimer un cap relatif à l'azimut de l'étoile polaire ou de la Croix du Sud. Le

jour, je suppose qu'ils suivaient plus ou moins la direction des vents dominants (?). Mais lors de la première traversée à travers le Pacifique, ils avançaient au hasard en espérant trouver une terre en prenant soin de noter leur latitude autant que possible, pour ne pas se perdre. Naviguer en latitude uniquement consiste à se tenir sur un parallèle et avancer vers l'Est ou vers l'Ouest en attendant de découvrir le but à atteindre. Il n'y avait aucune manière de se situer en longitude en dehors de l'estime.

J'essaie d'imaginer cette situation et une façon de prospecter sans prendre trop de risques : ils devaient peut être partir pour un certain nombre de jours puis revenir, même sans n'avoir rien trouvé, puis repartir mieux armés, et ainsi de suite, petit à petit dans d'autres directions ? Comment savoir ? On peut toujours imaginer.....

On pense savoir aujourd'hui que la patate douce serait génétiquement originaire d'Amérique Centrale et aurait été diffusée à travers l'immense Pacifique. Cela tendrait à démontrer que les Polynésiens étaient capables de partir et de revenir...

Le navigateur de Christophe Colomb devait également se servir des étoiles pour se situer en latitude mais la longitude restait un grand mystère pour lui.

Les grands découvreurs ont montré un courage hors du commun ainsi qu'une grande intelligence sans lesquels rien n'aurait été possible. On suppose que de

nombreux héros ne sont jamais revenus et se sont perdus dans l'immensité du Monde.

La Méridienne

La « méridienne » consiste à calculer sa position lors du passage d'un astre connu (soleil, lune, planètes, étoiles) au dessus du méridien local ou à midi local. La hauteur de cet astre au-dessus de l'horizon dépend de sa déclinaison et de la latitude l'observateur. Une addition ou soustraction suffit à connaître sa latitude de manière simple dans la mesure où le marin possède les éphémérides nautiques.

Les marins pêcheurs naviguaient de la sorte avant l'invention du gps. Ils n'avaient pas l'heure exacte avec assez de certitude, ils se satisfaisaient donc de la connaissance de leur latitude uniquement.

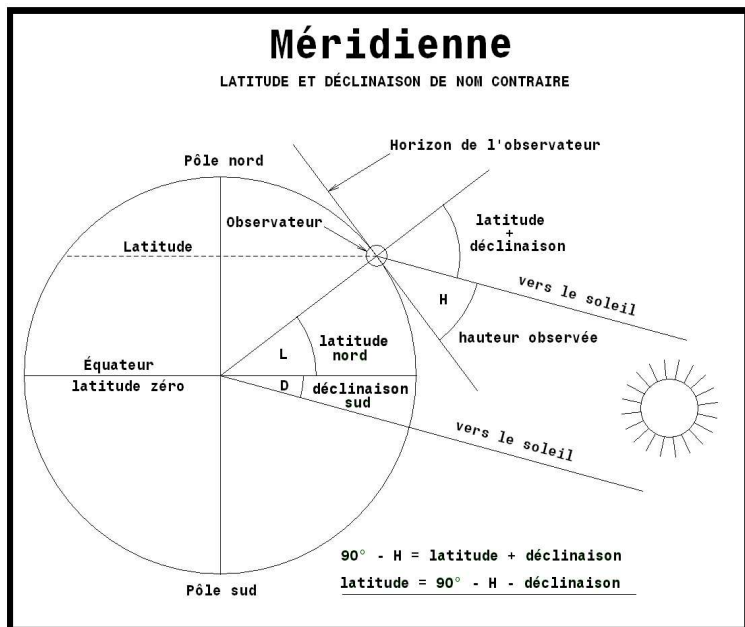
La hauteur du soleil – pour faire simple – doit être relevée à l'instant de son passage sur le méridien à l'instant de midi local.

L'heure du passage est calculée d'après sa position en longitude estimée. Il est donc prudent de prendre une certaine marge sous peine de rater la culmination.

On s'installe sur le pont avant l'heure estimée du passage au méridien en espérant que le soleil ne sera pas masqué par de gros nuages et on observe sa hauteur au-dessus de l'horizon. Celle-ci augmente doucement à mesure que la terre tourne jusqu'au moment où le soleil ne "monte plus", c'est le moment de la culmination. À cet instant, on note soigneusement la hauteur maximale atteinte **H0**.

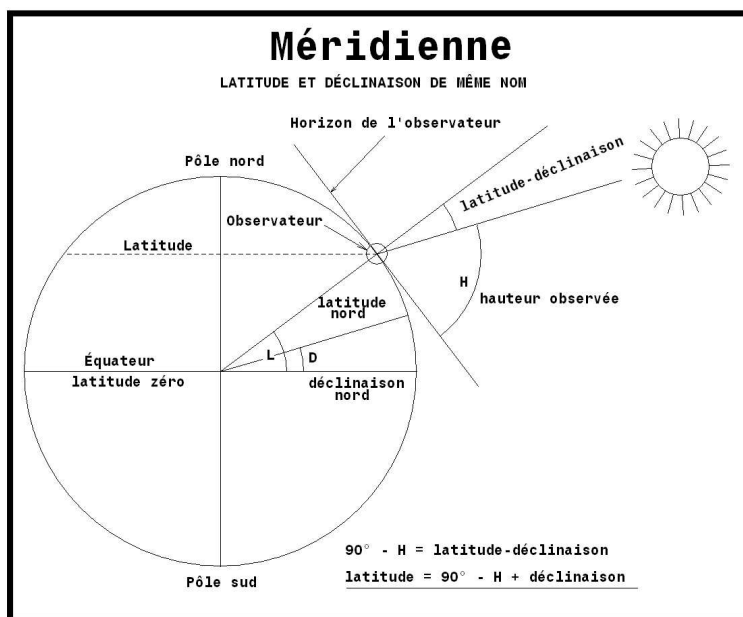
La hauteur du soleil est mesurée à l'aide du sextant en posant le bord inférieur du disque solaire sur l'horizon. En réalité l'angle observé doit être pris au centre du disque. Une correction sera indispensable, elle tiendra compte du demi-diamètre apparent du soleil, mais également de la parallaxe et de la réfraction atmosphérique moyenne. Des tables ont été établies à cet effet. Elles intègrent toutes ces corrections en plus de celle de la hauteur de l'œil de l'observateur au-dessus de la mer.

Latitude et déclinaison de nom contraire :



Ces croquis expliquent la démarche pour la latitude et la déclinaison de nom contraire, comme c'est le cas en hiver chez nous lorsque la déclinaison est « sud », et de même nom en été quand la déclinaison est « nord » (ci-dessous).

Latitude et déclinaison de même nom :



L'heure de la culmination ne peut être relevée avec précision car le soleil culmine durant un temps qui ne permet pas de savoir exactement quel sera le moment précis à la seconde près de son passage sur le méridien.

dien local. Dommage, car on connaîtrait en même temps la latitude et la longitude..

Pour la longitude, on procède donc de la manière suivante :

On note une hauteur **h1** avant la culmination et on note l'heure exacte **t1** au moment de cette observation. Puis on relève la hauteur **H0** de la culmination, laquelle permet le calcul de la latitude. Enfin on cale le sextant à la hauteur **h1** et on attend que le soleil redescende sur l'horizon pour revenir à cette hauteur.

Là, on note le temps **t2** à la seconde près en espérant qu'un nuage ne vienne pas perturber ce beau raisonnement.

Puis le calcul suivant ;

$$\mathbf{t0} = \mathbf{t1} + (\mathbf{t2} - \mathbf{t1}) / 2, \text{ ou } \mathbf{t0} = (\mathbf{t1} + \mathbf{t2}) / 2$$

donne l'heure du passage au méridien. On estime que la déclinaison n'a pas varié entre les temps **t1** et **t2**.

t0 nous permet de déduire notre longitude grâce aux éphémérides qui donnent l'heure du passage au méridien zéro établi à Greenwich pour la date du jour.

La différence entre l'heure de passage au méridien zéro et l'heure au méridien local donne la longitude locale sachant que la Terre tourne de 1 minute de longitude en 4 secondes. Autrement dit, la différence convertie en secondes puis divisée par 4 donne le nombre de minutes d'arc de longitude entre le méridien de Greenwich et le méridien local.

*

Il existe une méthode qui permet de se passer d'une première observation avant le passage au méridien. On ne prend qu'une hauteur quelques bonnes minutes après le passage lorsque le soleil – ou l'astre redescend vers l'horizon en notant l'heure de l'observation.

La méthode permet de choisir le moment par exemple entre les nuages, s'il en est.

Méthode à l'aide d'une calculette scientifique qui possède les fonctions trigonométriques.

L'observation du soleil jusqu'à la culmination permet de connaître sa latitude comme expliqué ci-dessus.

Après corrections des hauteurs et la connaissance de **H0**, nous pouvons simplement calculer notre latitude ainsi : **$L = 90^\circ - H0 \pm D$**

+ **D** lorsque L et D sont de même nom,

- **D** lorsque L et D sont de nom contraire.

Observez et notez ensuite une autre hauteur **h2** après le passage, à n'importe quel moment pas trop éloigné du temps approximatif de la culmination et notez le temps **t2** au moment précis de cette observation.

Dans un premier temps il est nécessaire de convertir les angles écrits en degrés et minutes en degrés et dixièmes de degrés pour pouvoir effectuer les calculs. (à moins de disposer d'un exemplaire capable de travailler directement en degrés et minutes.)

Exemple :

15° 43' donnent $15 + 43/60 = 15,71666^\circ$

On convertit de cette manière les angles :

- **H0** (culmination)
- **h2** (2^{ème} observation)
- **D** déclinaison si nécessaire
- **L** (Latitude calculée d'après H0 et D)

Ensuite on applique cette formule :

$$\cos P = 1 - \frac{\sin H0 - \sin h2}{\cos D \times \cos L}$$

(nous verrons plus loin comment cela est construit)

On obtient ainsi Cos(**P**) qui est le Cosinus de l'angle au pôle **P**, autrement dit l'angle parcouru par la rotation de la Terre pendant le temps écoulé depuis le passage au méridien local jusqu'au temps de l'observation de **h2**.

En extrayant le Cosinus de **P** (par ArcCos(**P**)), on obtient l'angle au pôle **P** en degrés et dixièmes sur les calculettes.

Convertissez ce résultat en minutes d'arc, exemple :

$$P = 1,39^\circ \gg P_m = 1,39 \times 60 = 83,4'$$

La Terre tourne de 1 minute d'arc de longitude en 4 secondes de temps.

dt = $83,4' \times 4 = 333,6$ secondes, soit dans notre exemple :

$$333 / 60 = 5,56 \text{ minutes de temps.}$$

$$5 \text{ minutes} + 0,56 \times 60 = 5 \text{ minutes } 33,6 \text{ secondes}$$

Au total, **dt** = 5 minutes 33,6 secondes, temps écoulé, à soustraire de l'heure **t2** de l'observation de **h2** après le passage au méridien local.

Nous avons maintenant l'heure du passage exacte au méridien local : **t0 = t2 - dt**

Une autre méthode consiste à effectuer le calcul de la droite de hauteur, comme nous le verrons plus loin.

*

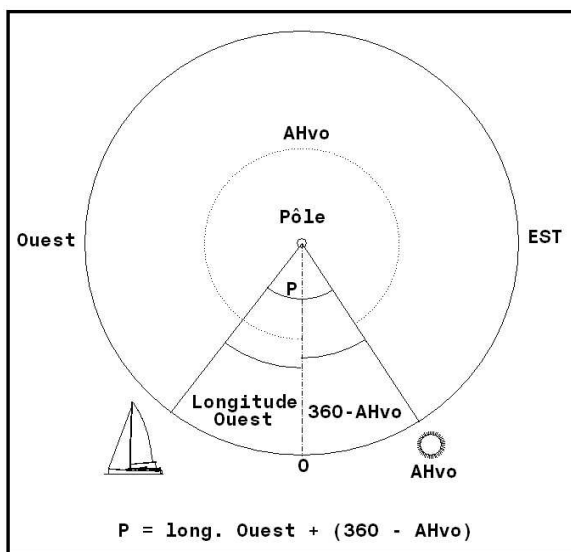
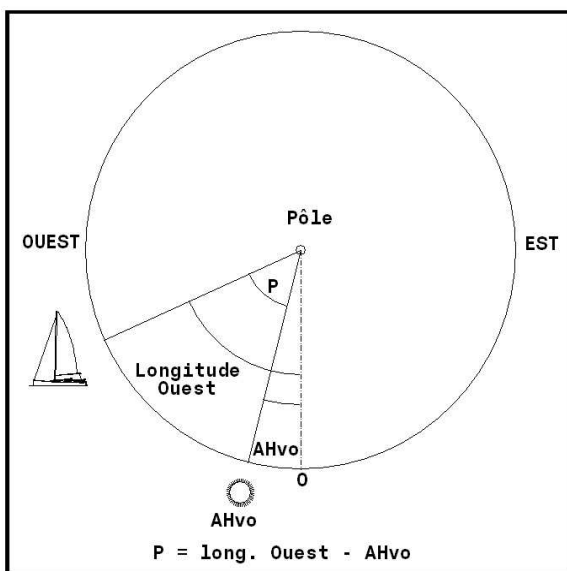
L'Angle au pôle

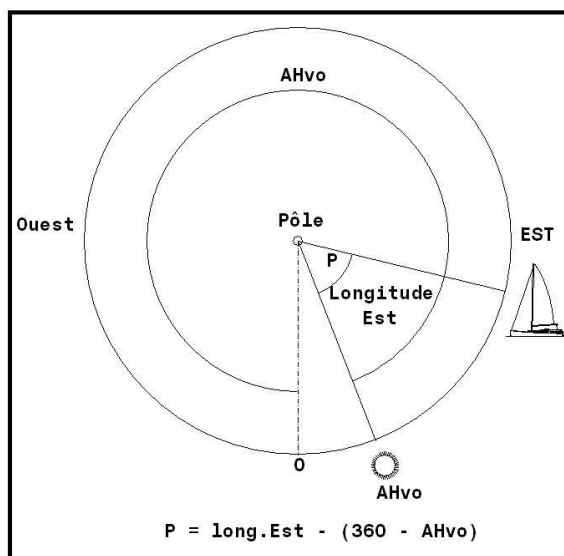
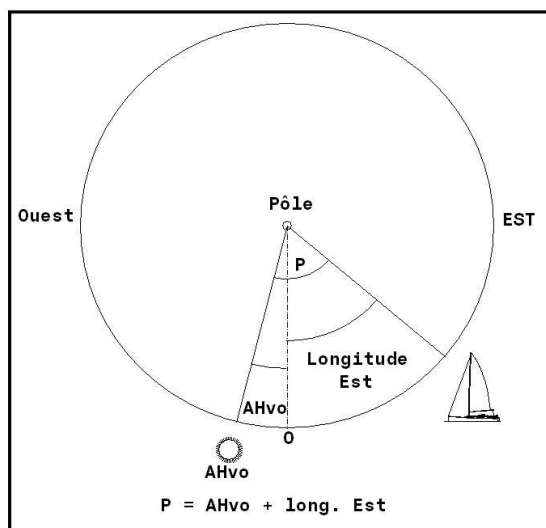
La valeur de l'angle au pôle de notre triangle sphérique dépend de notre longitude et de celle du « point zénithal » AHvo qui est donné dans les éphémérides.

AHvo est compté de 0 à 360° en partant vers l'ouest.

L'angle au pôle se calcule par la différence en valeur absolue entre AHvo et notre longitude.

Les cas de figure possibles sont illustrés dans ces croquis :





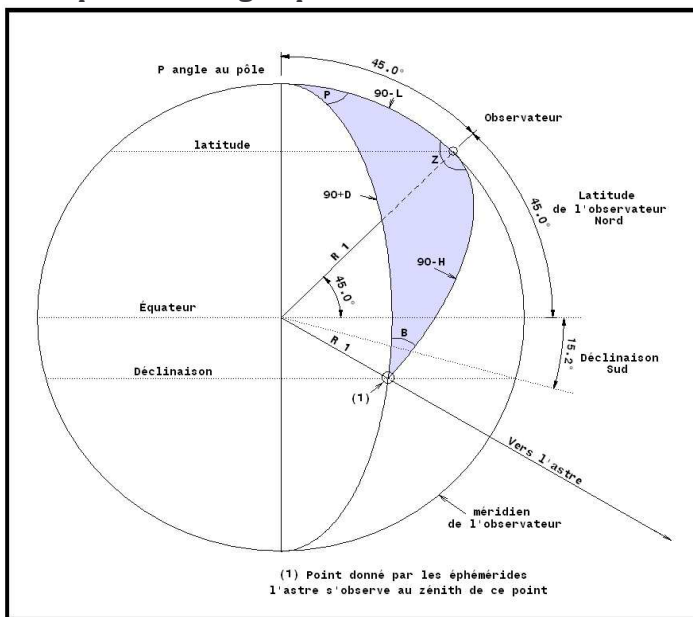
La droite de hauteur

Avant d'aborder la "droite de hauteur", imaginons ce qu'est un triangle sphérique : un triangle tracé sur une sphère avec des arcs de rayon R égal à celui de la sphère. [Par exemple $R=1$ pour faire simple ; les dimensions linéaires n'entrent pas dans ces considérations angulaires].

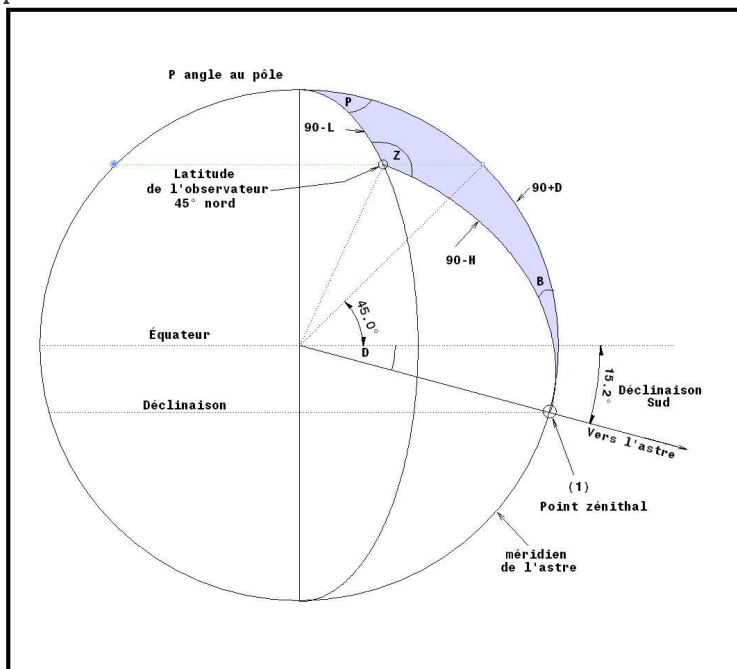
On appelle ces arcs, des "arcs de grand-cercle", c'est-à-dire que le centre de ces arcs se situent au centre de la sphère.

En effet, on peut tracer des cercles plus petits sur une sphère, par exemple sur les degrés de latitude ou ailleurs, comme on veut, mais ces arcs ne sont pas ceux des triangles sphériques de grand cercle.

Croquis du triangle qui nous intéresse :



La représentation de notre triangle sphérique peut se dessiner de cette manière ci-dessus, avec le plan du méridien de l'observateur posé sur notre feuille de papier ou bien de cette autre manière :



avec le plan du méridien de l'astre placé sur notre papier. Le triangle sphérique est le même que précédemment mais vu sous un autre angle.

Tous les méridiens sont des arcs de grand cercle.

Notre triangle est donc composé de trois côtés et trois angles qui se mesurent tous en degrés, puisque chaque côté est un arc de grand cercle.

Les trois angles sont, comme figuré :

- L'angle au Pôle **P** ou degré de longitude

- La droite de hauteur :

[illegible]

24

point zénithal et le rayon un arc de cercle de la valeur de 90° moins la hauteur observée ; **90-H**.

Aux points (1) ou (2), l'observateur se trouve sur le même méridien que celui de l'astre. Il se situera par conséquent sur la latitude :

90-H+D au point (1) **L** et **D** de même nom et

90-H-D au point (2) **L** et **D** de nom contraire.

Comme pour la méridienne.

Toutes les autres positions sur la droite de hauteur seront définies par une latitude et un angle au pôle propres.

Le fait de relever la hauteur d'un astre permet donc de savoir uniquement sur quelle droite nous nous situons ou plutôt sur quel cercle d'égales hauteurs pour être précis.

En principe, la connaissance de trois mesures, **90-H**, **90-D** et **Z** d'un triangle sphérique permet de déduire les trois autres mesures, **P** et **90-L** (et **B**) qui nous intéressent au premier chef. Si nous pouvions connaître la valeur exacte de **Z** par rapport au pôle géographique élevé, le triangle serait résolu mais cela n'est pas praticable car rien n'indique où se trouve le pôle géographique de la Terre lorsqu'on se trouve isolé en pleine mer.

Nous dirigerons nos efforts d'une autre manière par une démarche inverse : nous estimerons notre position (latitude et longitude et angle au pôle) et nous calculerons quelle serait la hauteur observée à l'instant « **t** ».

Nous positionnons soigneusement notre point estimé sur la carte pour la mémoriser.

The diagram illustrates the geometric relationships between celestial coordinates and observer position. It shows a celestial sphere with the Pole, Equator (équateur), and an observer's position (obs). Key angles include latitude, declination (D), and zenith distance (Z). A shaded region represents the area between the observer's horizon and the celestial equator. Labels include 'Pôle', 'latituede', 'D déclinaison', 'équateur', 'point zénithal', and 'astre'.

Nous calculons donc **He** à partir de notre latitude estimée **L** et notre angle au pôle estimé **P**, c'est-à-dire la différence de longitude entre celle donnée par **Ahvo** et notre longitude estimée.

La déclinaison **D** est également donnée par les éphémérides.

Avec ces éléments, quelle devra être la hauteur estimée **He** ?

La formulation classique est celle-ci :

- Si **L** et **D** sont de même nom :

$$\sin He = \cos P \times \cos L \times \cos D + \sin L \times \sin D$$

- Si **L** et **D** sont de nom contraire :

$$\sin He = \cos P \times \cos L \times \cos D - \sin L \times \sin D$$

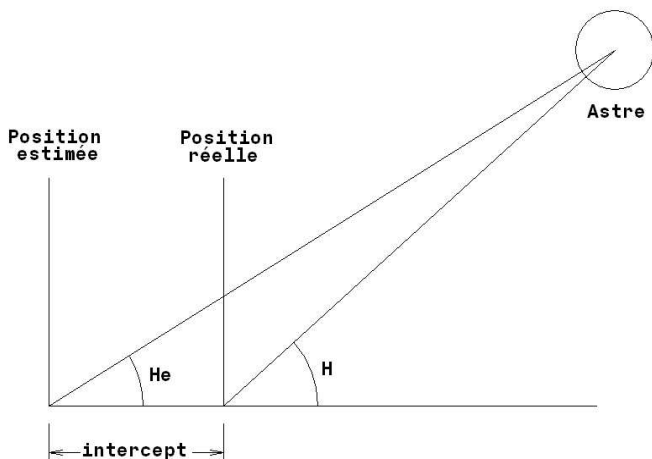
La hauteur estimée ne sera évidemment pas celle que nous avons relevée... On notera une différence nommée « intercept » : **H** – **He**, hauteur mesurée moins hauteur estimée.

L'intercept s'exprime en minutes de degré.

Une minute de degré d'arc de grand cercle sur la sphère terrestre représente un mille. (il n'y a qu'une seule mesure du mille en français, elle est égale à 40.000 km divisé par 360 fois 60 minutes = 1851,85 mètres. Le « mille nautique » (!) est un pléonasme venu de l'anglais qui écrit « mile » pour le mile impérial terrestre d'une valeur de 1 609,344 mètres et « mile » pour le mille de 1852 m. Ils doivent donc préciser de quel « mile » il s'agit, alors qu'en français, cela n'est pas nécessaire...)

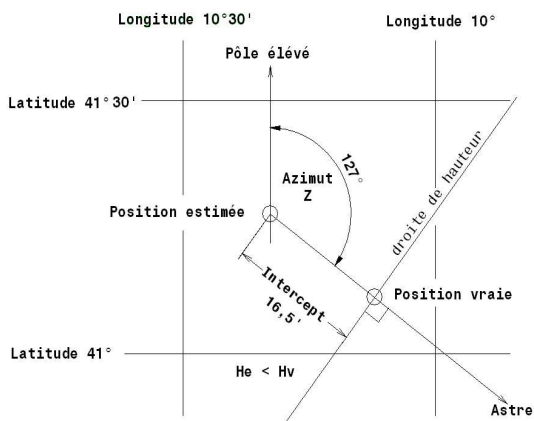
Le croquis ci-dessous illustre notre situation :

Si **H** > **He**, il faudra modifier notre position estimée de la valeur de l'intercept en la déplaçant vers l'astre dans la direction de **Z** :



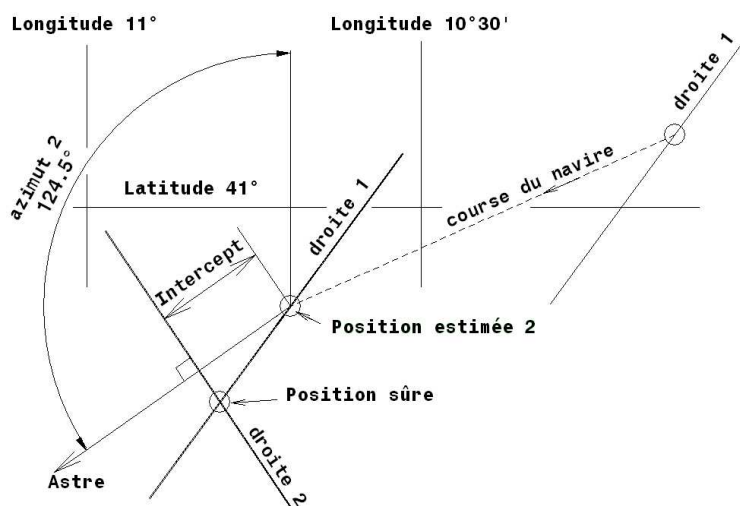
Dans le cas contraire, on déplacera notre position estimée de la valeur de l'intercept en s'éloignant de l'astre dans la direction inverse de **Z**.

La valeur de **Z** est calculée à partir de la position estimée. Il y a donc une marge d'erreur par rapport à la position réelle mais elle reste très minime compte tenu des imprécisions générales qui concerne les interpolations dans les calculs et les erreurs de relevées des hauteurs à la mer sur un navire instable.



En principe on sait dans quelle direction se trouve l'astre, vers l'ouest ou vers l'est selon qu'il soit avant ou après midi local.. Dans cet exemple ci-dessus, l'astre est relevé vers l'est.

La position « vraie » peut se situer n'importe où sur la droite de hauteur. Il faudra effectuer une deuxième observation selon un azimuth différent qui recoupera la première, laquelle aura été déplacée avec la progression du navire comme dessiné :



Le navire a parcouru une certaine distance selon un certain cap. On déplace la droite 1 avec lui jusqu'au moment de la deuxième observation, par exemple après le passage au méridien local. La droite 2 recoupera la droite 1, ce qui donnera la position avec la précision donnée par l'estime du déplacement de la droite 1.

Lorsqu'il est possible de relever plusieurs hauteurs d'étoiles connues, on peut tracer autant de droites de hauteurs simultanément selon des azimuts différents, ce qui donne immédiatement la position réelle du navire (où de l'avion).

Si entre-temps une méridienne aura été calculée, la position sera d'autant plus validée.

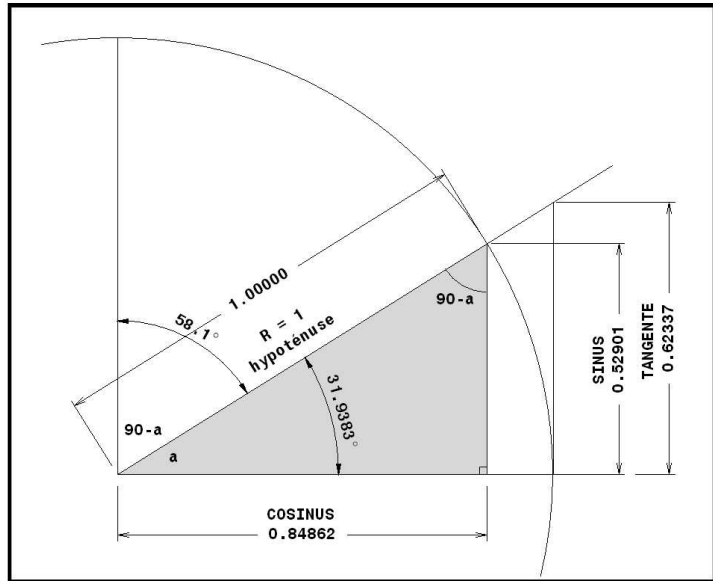
Revenons sur les formules

$$\begin{aligned} \sin He &= \cos P \times \cos L \times \cos D + \sin L \times \sin D \text{ et} \\ \sin He &= \cos P \times \cos L \times \cos D - \sin L \times \sin D \end{aligned}$$

Il n'y a rien de complexe là dedans, quelques minutes pour entrer dans la démarche peuvent donner un peu plus de concret pour ces choses de la mer et du mouvement de notre planète.

Pour commencer voyons un petit cours de trigonométrie « plane ».

Considérons, ci-dessous, le triangle rectangle en grisé dans un cercle de rayon = 1.



Ici l'angle $(a) = 31.9383^\circ$

Si on mesure la longueur du côté opposé à (a) on trouvera 0,52901.

C'est la valeur exactement du sinus de (a)

La longueur du côté adjacent est le cosinus de (a)

Voilà résumé en deux lignes les principes de trigo.

Maintenant, si on agrandit ce triangle avec une hypoténuse, mettons de 3,28 mètres, il sera 3,28 fois plus grand de partout sauf dans ses angles qui resteront les mêmes.

Le côté opposé à (a) devient : $3,28 \times \sin(a) = 3,28 \times \sin(31.9383^\circ)$

donc $3,28 \times 0,84862 = 2,783 \text{ m}$

On peut constater que :

$\cos(a) = \sin(90-a)$ ou
 $\sin(a) = \cos(90-a)$

On écrit **sin**, **cos** et **tan**, pour abrégé.

Le procédé est très utile pour mille choses !

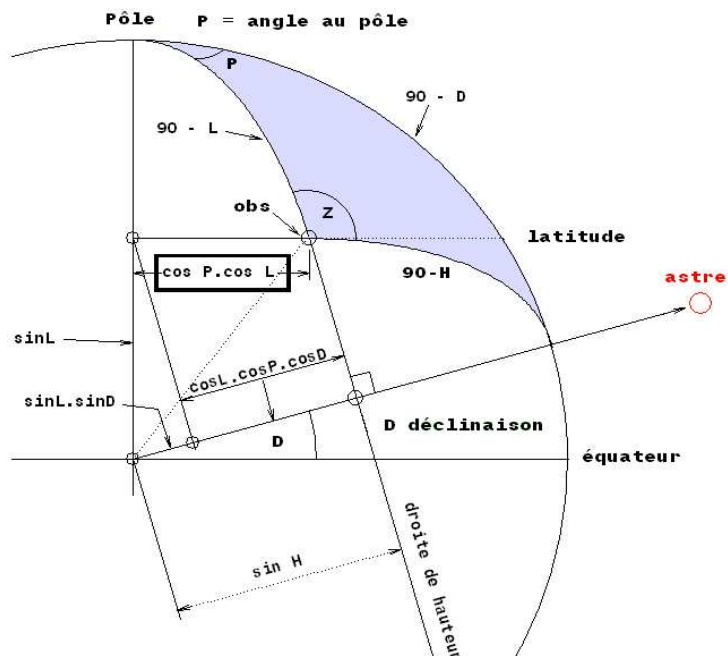
Il existe des tables de sinus et cosinus, elles étaient utilisées quotidiennement avant l'invention des calculatrices.

Reprenons notre croquis avec le triangle sphérique :

$$\sin H = \cos P \times \cos L \times \cos D + \sin L \times \sin D$$

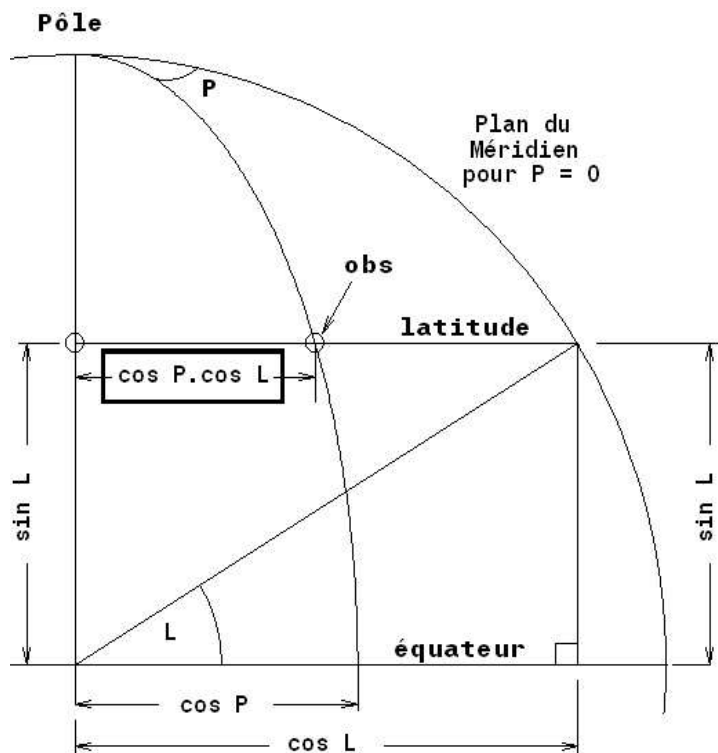
Avençons pas à pas :

1 - Pourquoi **cosP.cosL** comme figuré ?



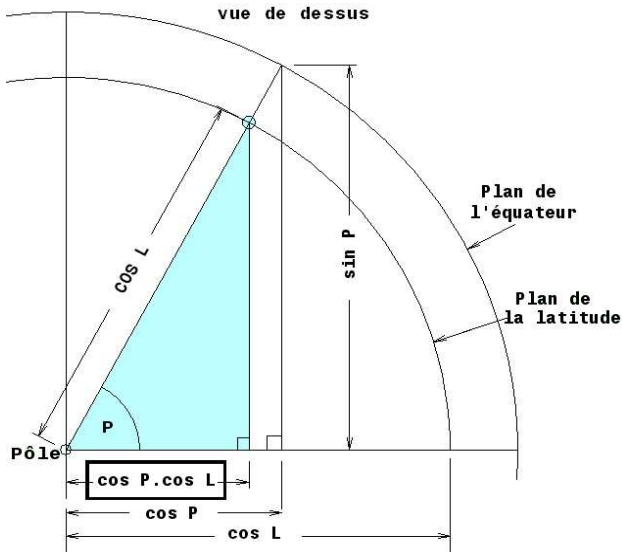
D'abord **cos L** :

Le rayon du cercle de latitude **L** est égal à **cos L** tel que la trigonométrie plane le montre :



Maintenant : **cos P**

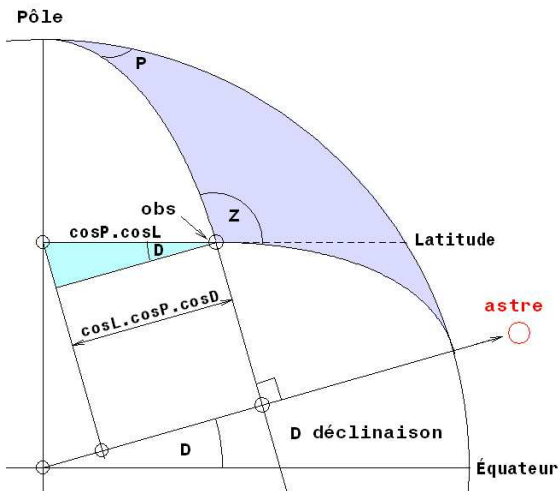
En visionnant la situation « par dessus » les choses s'éclaircissent....



Le triangle bleuté montre que sa base est égale à :

cos L × cos P

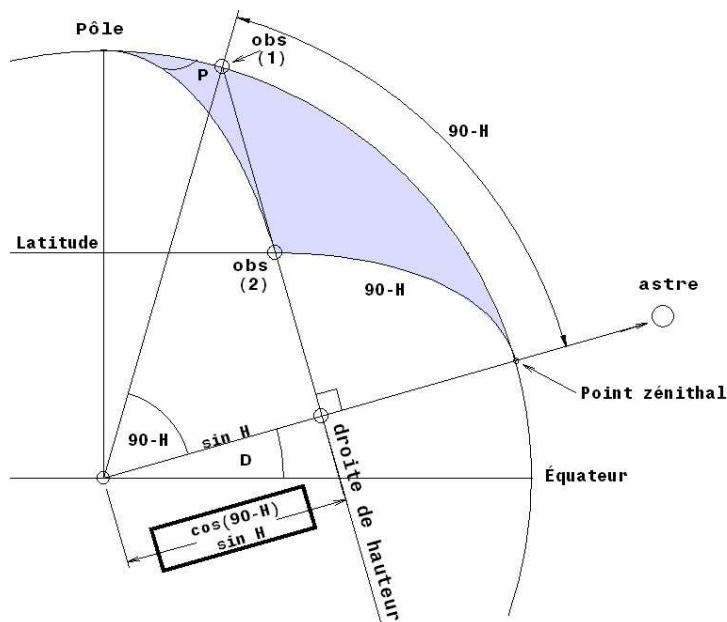
Introduisons maintenant la déclinaison **D** :



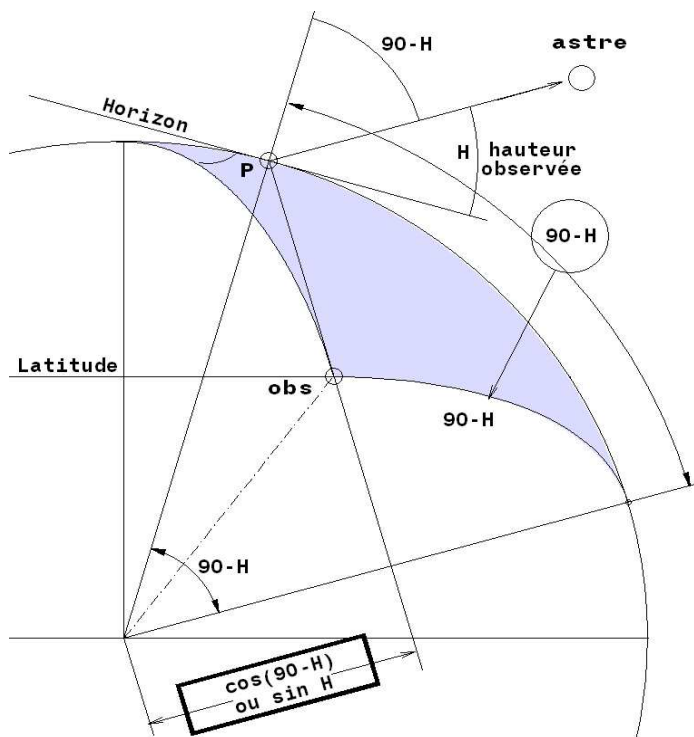
qui nous donne **cos P × cos L × cos D**

2 - Maintenant la hauteur **H** :

Reprenons notre croquis explicitant la droite de hauteur ;



Comme nous l'avons vu, à toutes les positions de l'observateur sur la « droite de hauteur », la hauteur observée de l'astre **H** sur l'horizon sera la même et le côté correspondant de notre triangle sphérique sera égal à **90-H**.



La longueur de la base de notre triangle sphérique est bien égale à **90-H** car l'observateur est positionné sur la droite de hauteur qui donne toujours la même hauteur observée **H**.

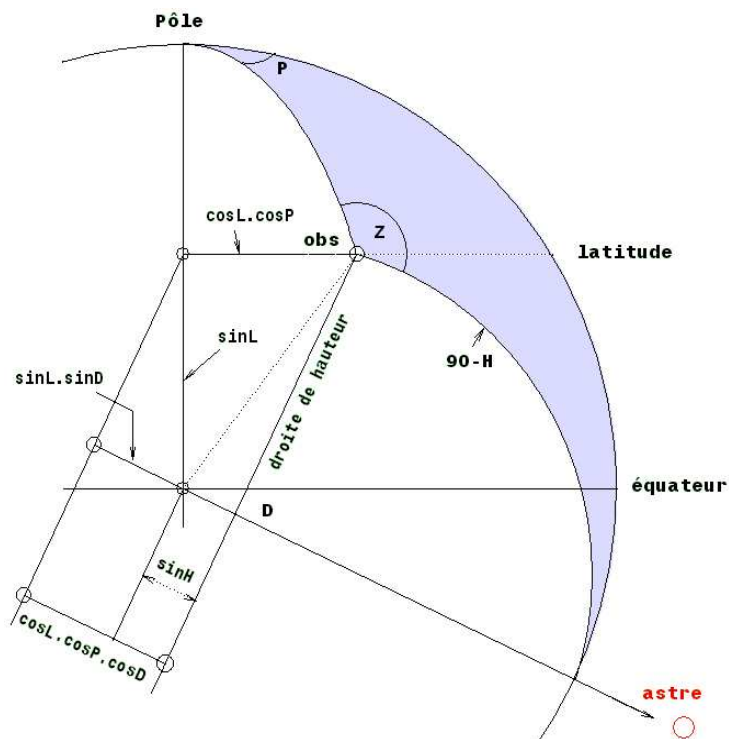
$$\sin H = \cos(90-H)$$

en reprenant le croquis général, nous voyons que :

SinH = cosP×cosL×cosD + sinL×sinD lorsque **L** et **D** sont de même nom :

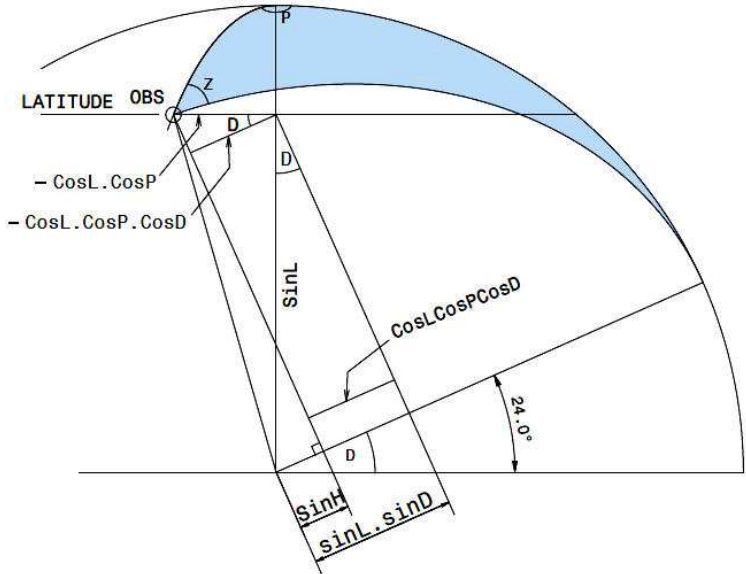


$\sin H = \cos P \times \cos L \times \cos D - \sin L \times \sin D$ lorsque **L** et **D** sont de nom contraire,



et

SinH = sinL×sinD +cosP×cosL×cosD lorsque **L** et **D** sont de même nom et que **P** est plus grand que **90°**



$$\sin H = \sin D \sin L + \cos D \cos L \cos P$$

+ car CoL.CosP.CosD est négatif avec $P > 90$

Ce cas de figure se produit autour du solstice d'été lorsque qu'on se trouve dans l'hémisphère nord et au solstice d'hiver dans l'hémisphère sud.

L'azimut **Z**

Comme on le voit sur les croquis, l'azimut est l'angle **Z** caractéristique de notre triangle sphérique, il donne à l'observateur la direction de l'astre depuis le pôle élevé. La connaissance de cet angle est nécessaire pour le tracé de l'intercept.

Il existe une relation constante entre les angles et les côtés d'un triangle sphérique, « la règle des sinus » qui se définit de cette manière :

$$\frac{\sin P}{\sin(90 - H)} = \frac{\sin Z}{\sin(90 - D)} = \frac{\sin G}{\sin(90 - L)}$$

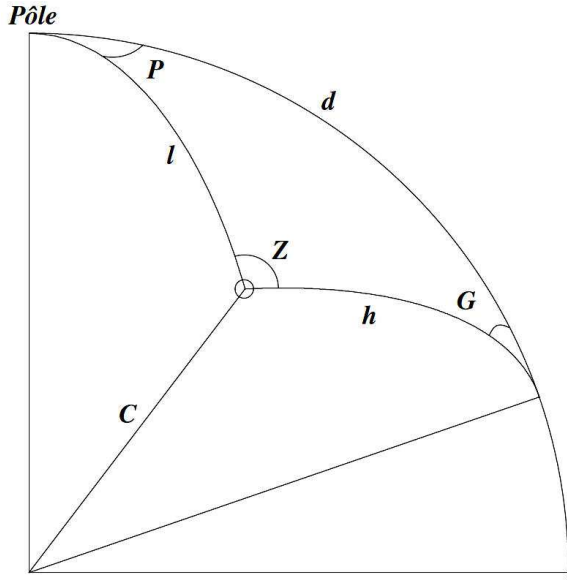
C'est-à-dire que le quotient du sinus d'un angle, divisé par le sinus du côté opposé, est constant et peut donc s'écrire selon les coordonnées depuis l'équateur :

$$\frac{\sin P}{\cos H} = \frac{\sin Z}{\cos D} = \frac{\sin G}{\cos L}$$

De cette formulation on tire $\sin Z = \frac{\sin P \times \cos D}{\cos H}$

SinZ est aussi bien le sinus de **Z** que celui de **180-Z**, ce qui peut soulever quelques doutes dans certains cas.

Comment démontrer « visuellement » cette règle des sinus ?



Il a été démontré qu'à partir de P et l on obtient C , de la même manière à partir de G et h on obtient C .

Il existe donc une égalité entre ses deux propositions, par exemple $f(P, l) = f(G, h)$ qui peut s'exprimer par $\sin P \times \sin l = \sin G \times \sin h$.

Et de là on tire : $\frac{\sin P}{\sin h} = \frac{\sin G}{\sin l}$ qui montre ce que nous essayons de « visualiser » simplement. Le troisième cas $\frac{\sin Z}{\sin d}$ s'obtient en faisant tourner les angles

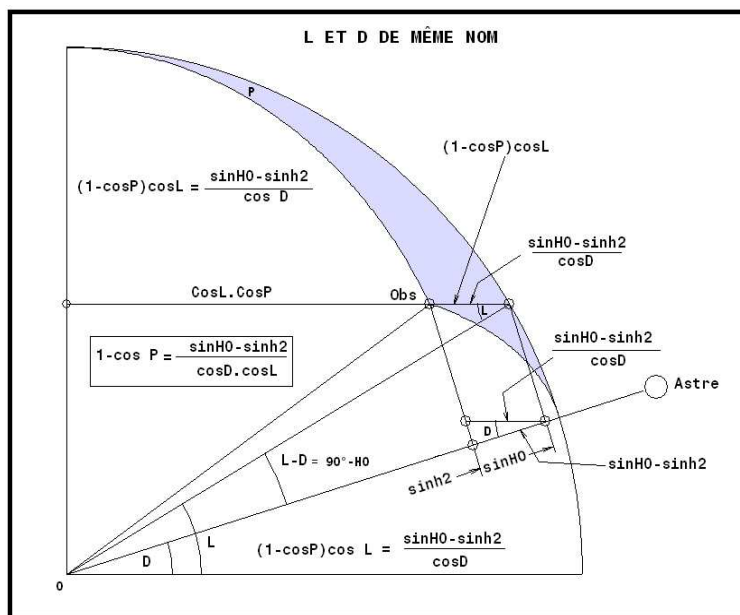
du même triangle d'où : $\frac{\sin P}{\sin h} = \frac{\sin G}{\sin l} = \frac{\sin Z}{\sin d}$

Des tables ont été établies pour donner directement l'azimut à partir des éléments connus. La valeur de l'azimut ne demande pas une précision en deçà du degré, ce qui facilite l'établissement des tables..

Encore un peu de méridienne

Maintenant que nous avons exercé notre esprit par quelques manipulations géométriques dans l'espace, nous pouvons revoir la formule utilisée dans le chapitre « méridienne » :

$$\cos P = 1 - \frac{\sin H_0 - \sin h_2}{\cos D \times \cos L}$$

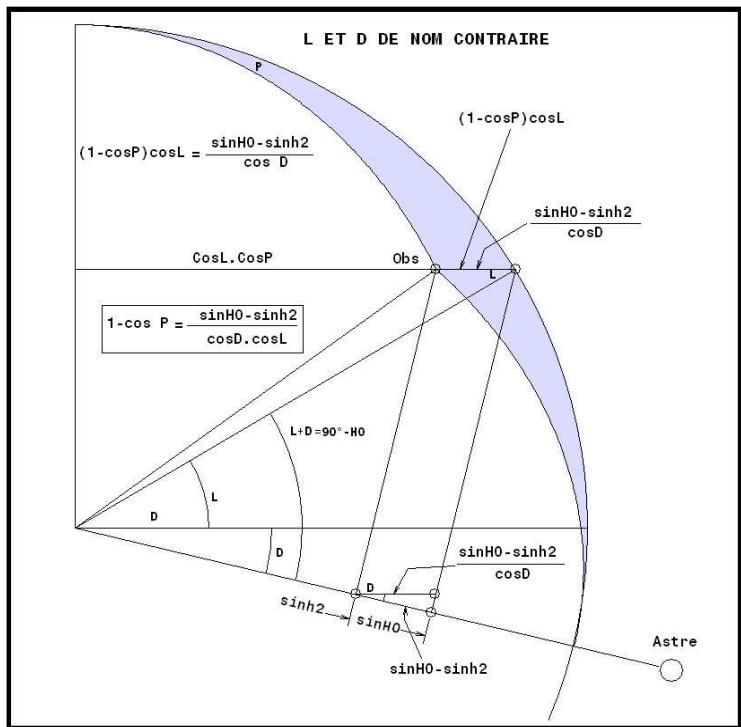


Un bon croquis vaut mieux que mille explications...

On utilise ici les « versines » :

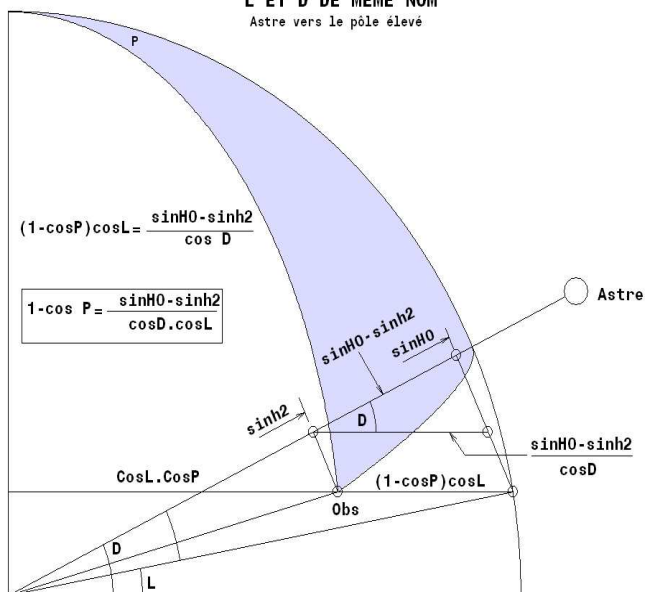
1- $\cos(a) = \text{versine de } \cos(a)$

Ce qui permet de traiter la différence H_0-h_2 comme on le voit. Ce type de méthode est utilisé par **Dieu-megard** pour ses tables de calcul de la droite de hauteur. Les deux autres cas possibles (ci-dessous) démontrent la même formule, quelles que soient les latitudes ou les déclinaisons.



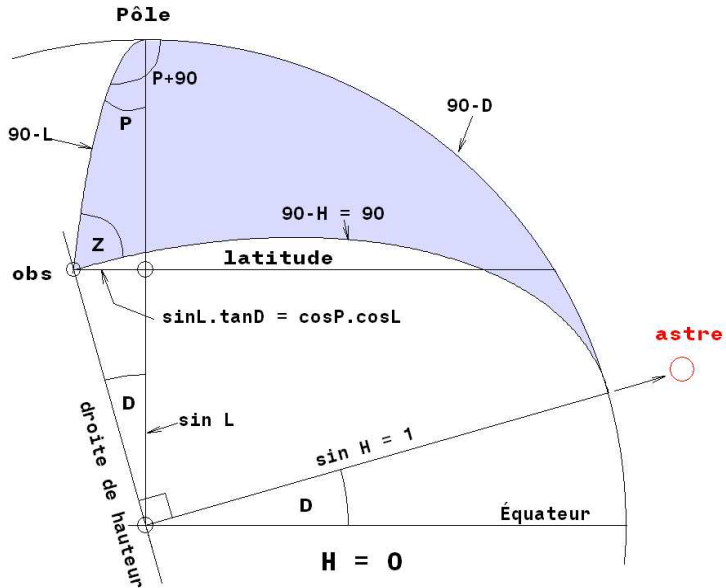
Astre vers le pôle élevé

Astre vers le pôle élevé



Lever et coucher

(ici L et D de même nom)



Dans ce cas, la hauteur observée est égale à zéro, en théorie. Ce qui permet de calculer directement la valeur de l'angle au pôle **P**, sachant que

$$\sin L \times \tan D = \cos P \times \cos L$$

on déduit :

$$\cos P = \frac{\sin L \times \tan D}{\cos L} \Rightarrow \cos P = \tan L \times \tan D$$

[sinus(L) / cosinus(L) = tangente(L)]

Ajouter 90° à **P** dans ce cas, ce qui permet de calculer la longitude de l'observateur.

Azimut **Z** : selon la règle des sinus : ($\sin 90^\circ = 1$)

$$\frac{\sin P}{\sin 90} = \frac{\sin Z}{\cos D} \Rightarrow \sin Z = \sin P \times \cos D$$

Les méthodes sans calculatrice

Calculer une hauteur estimée à l'aide d'une formule comme :

$$\text{SinHe} = \text{Cos}P \times \text{Cos}L \times \text{Cos}D \pm \text{Sin}L \times \text{Sin}D$$

n'est pas praticable en utilisant les tables donnant les lignes trigonométriques naturelles.

Le fait d'effectuer 5 multiplications de nombres à 5 ou 6 décimales ne peut être envisagé directement.

On utilisera donc des tables de logarithmes des sinus et cosinus des angles donnés à la minute près, voire moins selon la qualité des tables existantes.

Les logarithmes servent – entre autres - à multiplier de grands nombres en effectuant des additions, ce qui est nettement plus abordable. Petit rappel :

$10^2 \times 10^3 = 10^5$: On ajoute les puissances pour trouver le résultat de la multiplication.

2 est logarithme de 100 dans la base 10 ou

$$\log(100)=2, \log(1000)=3.....$$

De la même manière :

$$10^{0,285} \times 10^{0,457} = 10^{0,742}$$

Vérifions : somme des exposants et valeur finale :

$$0,285 + 0,457 = 0,742 10^{0,742} = 5,52077 (1)$$

Valeurs :

$$10^{0,285} = 1,927525 \text{ et } 10^{0,457} = 2,86417$$

Produit des valeurs :

$$1,927525 \times 2,86417 = 5,52077$$

Qui correspond bien à $10^{0,742}$ (1)

0,742 est le logarithme de 5,52077 dans la base 10

(On peut prendre n'importe quelle base)

Le procédé est efficace et dispense d'effectuer de très longues multiplications, sources d'erreurs évidentes.

En revanche il est nécessaire de disposer de tables de logarithmes des lignes trigonométriques.

Par exemple :

$$\text{Sinus } 61^\circ \times \text{Sinus } 20^\circ = 0,874619 \times 0,342020$$

égal 0,299137 qui est le Sinus de $17,40^\circ$

Prenons les logs (base 10) :

$$\text{Log Sin } 61^\circ \dots\dots\dots 0,058181$$

$$\text{Log Sin } 20^\circ \dots\dots\dots 0,465948$$

$$\text{Total des deux} \dots\dots\dots 0,524129$$

$$\text{Log du Sinus de } 17,40^\circ = 0,524129 - \text{CQFD}$$

Prenons un exemple concret

Après avoir calculé la valeur de notre angle au pôle, en fonction de notre longitude estimée, au temps « **t** » nos données sont celles-ci :

$$P = 51^\circ$$

$$L = 32^\circ \text{ N}$$

$$D = 12^\circ 42' \text{ N} \dots\dots (12,7^\circ)$$

Utilisons notre calculatrice (pour vérifier) :

$$\text{SinHe} = \text{CosP} \times \text{CosL} \times \text{CosD} + \text{SinL} \times \text{SinD}$$

$$\text{donne He} = 39,58^\circ, \text{ soit } \mathbf{He = 39^\circ 35'}$$

$$\sin Z = \frac{\sin P \times \cos D}{\cos H} = 79,62^\circ, \text{ la direction du so-}$$

leil est orientée vers le sud, nous devons donc effectuer
 $Z = 180 - 79,62 \dots \mathbf{Z = 100,4^\circ}$ à compter du pôle
 élevé, soit le pôle nord dans notre cas.

**Utilisons une table de log des lignes trigo-
 nométriques.**

$$1) \dots \cos P \times \cos L \times \cos D$$

$$\text{Log } \cos P = 0,201128$$

$$\text{Log } \cos L = 0,071580$$

$$\text{Log } \cos D = 0,010757$$

$$\text{Total} = 0,283465$$

Ce résultat est le Log de notre triple multiplication
 qui correspond à **0,520637**, selon une table de Log
 inverses des nombres.

Ensuite :

$$2) \dots \sin L \times \sin D$$

$$\text{Log } \sin L = 0,275790$$

$$\text{Log } \sin D = 0,657881$$

$$\text{Total} = 0,933671$$

Qui correspond à **0,116501**, selon une table de
 Log inverses des nombres.

3) Effectuons la somme comme indiquée dans :

$$\cos P \times \cos L \times \cos D + \sin L \times \sin D$$

$$\mathbf{0,520637 + 0,116501 = 0,637138}$$

qui est le sin de He

On retourne dans la table des lignes trigo naturelles et on extrait $\text{arc}(\sin H_e)$: **$H_e = 39^\circ 35'$**

Il nous faut donc, pour effectuer ces calculs :

- Une table des Log des lignes trigonométriques
- Une table des Log inverses des nombres
- Une table des lignes trigonométriques naturelles
- + une table des Azimuts (Tables 901 par exemple).

Ces tables – sauf azimuts - sont réunies avec grande précision dans l'ouvrage de **Friocourt** qui comporte nombre d'informations comme, entre autres, les corrections des hauteurs à la mer...

La méthode a été utilisée très efficacement pendant longtemps.

TABLES
DE
LOGARITHMES

A SIX DÉCIMALES

POUR LES NOMBRES ET LES LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES

ET

TABLES DE NAVIGATION

PAR

G. FRIOCOURT (O. *) O

CAPITAINE DE FRÉGATE, LICENCIÉ EN SCIENCES MATHÉMATIQUES
ANCIEN PROFESSEUR DE CALCUL NAVIGATIF À L'ÉCOLE NAVALE

En usage à l'École Navale
Réglementaires pour les Examens de la Marine Marchande
*Adoptées par l'École Navale de Livourne
et par les Écoles de Navigation d'Italie*

PARIS

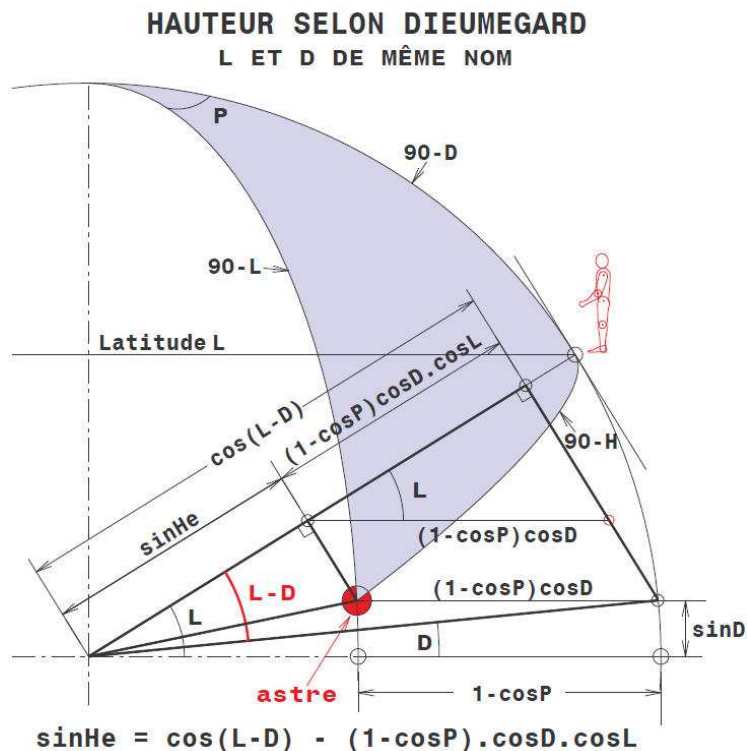
AUGUSTIN CHALLAMEL, ÉDITEUR
LIBRAIRIE MARITIME ET COLONIALE
RUE JACOB, 17

Édition stéréotype. — 16^e tirage. — 1922

Une autre méthode a été très utilisée au point de devenir la méthode officielle de ma marine, celle de

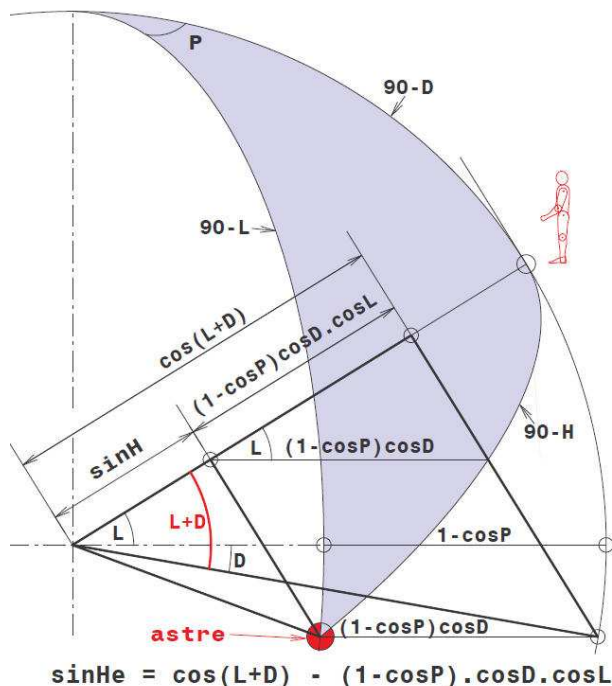
Dieumegard et Bataille pour les azimuts

On trouvera facilement ces ouvrages et leur mode d'emploi. Les formules de Dieumegard utilisent une versine des lignes trigonométriques $(1-\cos P)$:



Le croquis ci-dessus représente la situation avec l'observateur sur le méridien local lequel est posé ici sur le papier.

HAUTEUR SELON DIEUMEGARD L ET D DE NOM CONTRAIRE



Dieumegard a établi des tables de logarithmes à 4 décimales permettant d'effectuer les opérations comme expliqué par les logs avec la méthode de Fricourt.

Les Azimuts ne sont pas donnés, il faut entrer dans un deuxième ouvrage, celui de **Bataille**.

Reprenons notre exemple en utilisant les logarithmes précisés dans les tables.

$$P = 51^\circ$$

$$L = 32^\circ \text{ N}$$

$$D = 12^\circ 42' \text{ N} \dots (12,7^\circ)$$

L et D de même nom, donc

$$\sin He = \cos(L - D) - (1 - \cos P) \times \cos D \times \cos L$$

$$L - D = 19,3^\circ \text{ ou } 19^\circ 18'$$

$$\cos(L - D) = \mathbf{0,9438}$$

Logarithmes :

$$\text{Log}(1 - \cos P) = 0,4310$$

$$\log \cos D = 0,0108$$

$$\log \cos L = 0,0716$$

$$\text{total} = 0,5134 \dots \text{ log inverse } \mathbf{0,3036}$$

$\mathbf{0,9438} - \mathbf{0,3036} = \mathbf{0,6372}$ qui donne $\sin He$,
soit $39,583^\circ$ ou $\mathbf{39^\circ 35'}$

Ensuite on consulte la table de Bataille pour l'azimut.

Par rapport aux tables **Friocourt** (qui est plus précise à 6 décimales) on extrait le log inverse d'un seul résultat.

*

Les tables américaines HO-249

Les Américains ont publié plusieurs volumes, les HO-249, résolvant les triangles sphériques à partir de positions pré-calculées selon des angles au pôle, des latitudes et des déclinaisons ronds. Ces tables se présentent donc avec trois entrées :

- Latitude ronde **L (LAT)**
- Déclinaison ronde **D**
- Angle au pôle rond **P (LHA)**

et trois sorties :

- La hauteur calculée **Hc**
- Les différences **d** pour corriger la hauteur **Hc** en fonction des minutes de déclinaison.
- L'azimut **Z**

En effet la position estimée peut se trouver « environ, à peu près » dans une zone plausible de la carte, alors pourquoi pas sur des positions rondes..

Choisir un angle au pôle rond oblige à adapter sa longitude de manière que la différence entre AHvo et la longitude estimée soit ronde au degré près le plus proche..

Par exemple, si AHvo au moment de l'observation est 30° 28' W et notre longitude estimée est 5°35' W, nous devons calculer :

P = 30°28' – 5°35' = 24°53' dans un premier temps.

Pour obtenir un **P** rond, on adopte **P** = 25° (au plus près) ce qui oblige à changer de longitude estimée :

AHvo – **P** rond $\Rightarrow$ 30°28' – 25° = 5°28'W au lieu de 5°35', c'est-à-dire 7' de longitude plus loin vers l'W.

La latitude doit également être prise « ronde », c'est-à-dire décalée au maximum de 30' entre les degrés ronds.

Reprenons notre exemple

P = 51° (LHA 51)
L = 32 N (LAT 32°)
D = 12°42 N

On entre dans le volume 2 des tables à la page 32° de latitude et déclinaison de même nom, à la colonne déclinaison 12° et à la ligne LHA = 51°

		DECLINATION (0° – 14°) SAME NAME AS LATITUDE														LAT 32°	
		LHA															
		0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°	
		Hc	d	Z	Hc	d	Z	Hc	d	Z	Hc	d	Z	Hc	d	Z	
LHA	51	39	13	31	101	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42
	52	39	13	31	101	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42
	53	39	13	31	101	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42
	54	39	13	31	101	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42
	55	39	13	31	101	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42
	56	39	13	31	101	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42
	57	39	13	31	101	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42
	58	39	13	31	101	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42
	59	39	13	31	101	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42
	60	39	13	31	101	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42
	61	39	13	31	101	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42
	62	39	13	31	101	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42
	63	39	13	31	101	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42
	64	39	13	31	101	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42
	65	39	13	31	101	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42
		DECLINATION (0° – 14°) SAME NAME AS LATITUDE															
		LHA															
		0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°	
		Hc	d	Z	Hc	d	Z	Hc	d	Z	Hc	d	Z	Hc	d	Z	
LHA	51	39	13	31	101	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42
	52	39	13	31	101	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42
	53	39	13	31	101	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42
	54	39	13	31	101	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42
	55	39	13	31	101	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42
	56	39	13	31	101	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42
	57	39	13	31	101	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42
	58	39	13	31	101	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42
	59	39	13	31	101	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42
	60	39	13	31	101	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42
	61	39	13	31	101	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42
	62	39	13	31	101	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42
	63	39	13	31	101	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42
	64	39	13	31	101	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42
	65	39	13	31	101	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42	12	42

Extrait pour notre exemple ;

LAT 32°

		12°			13°			14°				
		Hc	d	Z	Hc	d	Z	Hc	d	Z		
		°	'	"	°	'	"	°	'	"		
51	39 13 31	101										

LAT 32°

Les tables donnent directement :

La hauteur **Hc = 39°13'** et l'azimut **Z=101°**

Une table d'interpolation est placée en début de volume : on y entre avec, en colonne, les minutes de déclinaison (42' dans notre exemple) et en ligne, les minutes données sous la rubrique **d** (ici 31' pour notre exemple ; 42 / 60 x 31 ou 31 / 60 x 42), et on sort **22'** positif ou négatif selon le signe de la différence incrit dans la table, ici +

39°13'+22 ' = 39°35' et Z = 101°

Nous avons trouvé avec notre calculatrice :

He 39°35' et Z = 100,4°

La méthode est extrêmement rapide et très bien adaptée à la navigation aérienne. Les hauteurs négatives sont prises en compte ; lorsque le navigateur se trouve à une haute altitude il peut observer l'astre sous son horizon artificiel (sextant à bulle).

Inconvénients, assez mineurs :

L'obligation de choisir une position estimée qui donne des entrées rondes et l'obligation de posséder 3 volumes assez conséquents de 300 pages chacun, pour couvrir tous les cas possibles.

Si on se limite aux astres d'une déclinaison inférieure à 29°, comme le soleil par exemple :

volume 2 :

- latitudes de 0° à 39° et déclinaisons de 0° à 29°

volume 3 :

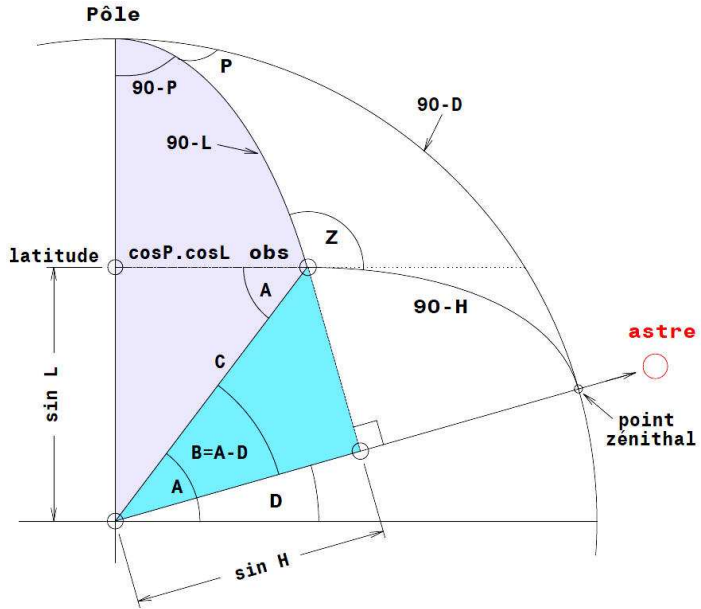
- latitudes de 40° à 89° et déclinaisons de 0° à 29°

sont est suffisants. Le volume 1 est dédié aux étoiles particulières selon la liste proposée.

Méthode intermédiaire Balta

Développée en 1977

Reprenons notre triangle sphérique dessiné avec le plan du méridien de l'astre sur le papier :



Considérons maintenant le triangle sphérique gris ;
la règle des sinus nous donne :

$$\frac{\sin(90 - P)}{\sin C} = \frac{\sin(90 - A)}{\sin(90 - L)} \text{ ou } \frac{\cos P}{\sin C} = \frac{\cos A}{\cos L}$$

et donc $\cos P \times \cos L = \sin C \times \cos A$ ce qui peut être vérifié sur notre croquis et ce qui valide la « règle des sinus », en quelque sorte.

On constate aussi que :

$$\sin C = \frac{\sin L}{\sin A} \text{ et } \sin C = \frac{\sin H}{\cos B}$$

Les deux triangles possèdent la même hypoténuse **sin C**. En connaissant les angles **A** et **D**, il devient possible de déduire la hauteur **H** :

$$\mathbf{\sin H = \sin C \times \cos B}$$

$$\text{Sachant que } \tan A = \frac{\cos P \times \cos L}{\sin L}$$

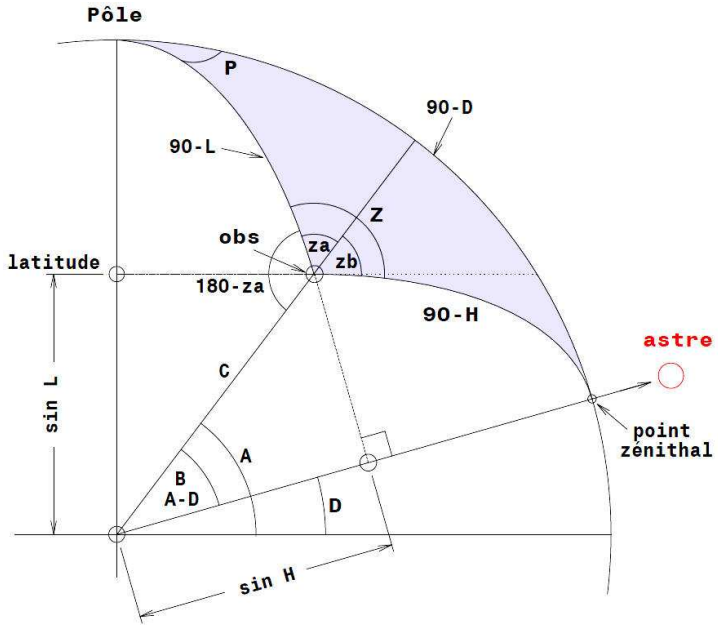
Concevons une table donnant les valeurs de **C** et de **A** en fonction de **P** et de **L** :

sin H sera tout simplement calculé par :

$$\mathbf{\sin H = \sin C \times \cos B}$$

En donnant directement le log de « **sin C** », il suffira d'ajouter le log de **cos B** pour obtenir le log recherché de **sin H**.

L'azimut



Selon la règle des sinus :

$$\frac{\sin(90 - P)}{\sin C} = \frac{\sin(180 - Za)}{\sin 90}$$

$$\text{ou } \frac{\cos P}{\sin C} = \frac{\sin Za}{1} \Rightarrow \sin Za = \frac{\cos P}{\sin C}$$

de la même manière

$$\frac{\sin B}{\sin(90 - H)} = \frac{\sin(180 - Zb)}{\sin 90}$$

ou

$$\frac{\sin B}{\cos H} = \frac{\sin Zb}{1} \Rightarrow \sin Zb = \frac{\sin B}{\cos H}$$

et finalement : $Z = Z_a + Z_b$

Reprenons notre exemple

$P = 51^\circ$ (LHA 51)

$L = 32^\circ \text{ N}$ (LAT 32°)

$D = 12^\circ 42' \text{ N}$ ($12,7^\circ$)

On entre dans la table 1 à la latitude 32 et à la ligne P 51, ce qui donne :

	<u>LATITUDE</u>	<u>32°</u>	
	Log C	A	Za
<u>P 51</u>	0.123729	44° 47.8	56.8

Calcul de **B** selon ces règles :

L et D de MÊME NOM

$B = A - D$

Si D plus petit que A : $Z = Z_a + z_b$

Si D plus grand que A : $Z = Z_b - Z_a$

$B = A - D \dots 44^\circ 47,8' - 12^\circ 42' = 32^\circ 05,8'$

Maintenant on cherche le log du cosinus de **B**

On trouve : **0,072054** pour $32^\circ 06'$

On ajoute **log C** **0,123729**

Total..... **0,195783**

Qui est le log de **sin H : $39^\circ 35'$** extrait de la table des logs des sinus.

Dans la table des compléments d'azimut, on trouve

$43,2^\circ$ aux rubriques **H 39 et B 32**

$Z = 56,8 + 43,2 = 100^\circ$

Les tables se composent de 45 pages (A4) pour toutes les latitudes de 0° à 89° Nord ou Sud :

P	LATITUDE 41°			LATITUDE 42°			LATITUDE 43°			LATITUDE 44°		
	Log C	A	Za	Log C	A	Za	Log C	A	Za	Log C	A	Za
1	0.000038	41°00.3	89.3	0.000037	42°00.3	89.3	0.000035	43°00.3	89.3	0.000034	44°00.3	89.3
2	0.000151	41°01.0	88.7	0.000146	42°01.0	88.7	0.000142	43°01.0	88.6	0.000137	44°01.0	88.6
3	0.000339	41°02.3	88.0	0.000329	42°02.3	88.0	0.000318	43°02.4	88.0	0.000308	44°02.4	87.9
4	0.000603	41°04.2	87.4	0.000584	42°04.2	87.3	0.000566	43°04.2	87.3	0.000547	44°04.2	87.2
5	0.000942	41°06.5	86.7	0.000913	42°06.5	86.6	0.000884	43°06.5	86.6	0.000855	44°06.5	86.5
6	0.001356	41°09.4	86.1	0.001314	42°09.4	86.0	0.001273	43°09.4	85.9	0.001231	44°09.4	85.8
7	0.001845	41°12.7	85.4	0.001788	42°12.8	85.3	0.001732	43°12.8	85.2	0.001675	44°12.9	85.1
8	0.002409	41°16.7	84.7	0.002335	42°16.7	84.6	0.002261	43°16.8	84.5	0.002187	44°16.8	84.4
9	0.003048	41°21.1	84.1	0.002955	42°21.2	84.0	0.002861	43°21.3	83.8	0.002767	44°21.3	83.7
10	0.003762	41°26.1	83.4	0.003647	42°26.2	83.3	0.003531	43°26.3	83.1	0.003415	44°26.3	83.0
11	0.004550	41°31.6	82.7	0.004411	42°31.7	82.6	0.004270	43°31.8	82.4	0.004130	44°31.9	82.3
12	0.005413	41°37.7	82.1	0.005247	42°37.8	81.9	0.005080	43°37.9	81.8	0.004912	44°38.0	81.6
13	0.006351	41°44.3	81.4	0.006155	42°44.4	81.2	0.005958	43°44.6	81.1	0.005762	44°44.6	80.9
14	0.007362	41°51.4	80.7	0.007135	42°51.6	80.5	0.006906	43°51.8	80.3	0.006678	44°51.8	80.2
15	0.008447	41°59.1	80.0	0.008186	42°59.4	79.8	0.007923	43°59.5	79.6	0.007660	44°59.6	79.5
16	0.009606	42°07.4	79.3	0.009308	43°07.7	79.1	0.009009	44°07.8	78.9	0.008709	45°07.9	78.7
17	0.010839	42°16.3	78.7	0.010501	43°16.5	78.4	0.010163	44°16.7	78.2	0.009824	45°16.8	78.0
18	0.012144	42°25.7	78.0	0.011765	43°26.0	77.7	0.011384	44°26.2	77.5	0.011004	45°26.2	77.3
19	0.013522	42°35.7	77.3	0.013098	43°36.0	77.0	0.012674	44°36.2	76.8	0.012249	45°36.3	76.5
20	0.014973	42°46.3	76.6	0.014502	43°46.6	76.3	0.014030	44°46.8	76.1	0.013559	45°46.9	75.8
21	0.016495	42°57.5	75.9	0.015975	43°57.8	75.6	0.015454	44°58.0	75.3	0.014932	45°58.1	75.1
22	0.018090	43°09.2	75.2	0.017517	44°09.6	74.9	0.016943	45°09.9	74.6	0.016370	46°09.9	74.3
23	0.019755	43°21.6	74.4	0.019127	44°22.1	74.1	0.018498	45°22.3	73.9	0.017870	46°22.3	73.6
24	0.021491	43°34.7	73.7	0.020805	44°35.1	73.4	0.020119	45°35.3	73.1	0.019433	46°35.4	72.8
25	0.023297	43°48.3	73.0	0.022550	44°48.8	72.7	0.021804	45°49.0	72.4	0.021057	46°49.0	72.1
26	0.025173	44°02.6	72.3	0.024362	45°03.1	71.9	0.023552	46°03.3	71.6	0.022743	47°03.3	71.3
27	0.027117	44°17.6	71.5	0.026240	45°18.0	71.2	0.025364	46°18.2	70.8	0.024489	47°18.2	70.5
28	0.029130	44°33.2	70.8	0.028184	45°33.6	70.4	0.027238	46°33.8	70.1	0.026295	47°33.8	69.7
29	0.031210	44°49.5	70.0	0.030192	45°49.9	69.6	0.029174	46°50.1	69.3	0.028159	47°50.0	68.9
30	0.033357	45°06.5	69.3	0.032263	46°06.9	68.9	0.031171	47°07.0	68.5	0.030081	48°06.9	68.1
31	0.035569	45°24.1	68.5	0.034397	46°24.6	68.1	0.033227	47°24.6	67.7	0.032060	48°24.4	67.3
32	0.037847	45°42.5	67.7	0.036593	46°42.9	67.3	0.035342	47°43.0	66.9	0.034095	48°42.7	66.5
33	0.040188	46°01.6	66.9	0.038850	47°02.0	66.5	0.037515	48°02.0	66.1	0.036184	49°01.6	65.7
34	0.042593	46°21.5	66.1	0.041166	47°21.8	65.7	0.039744	48°21.7	65.3	0.038327	49°21.2	64.9
35	0.045058	46°42.0	65.3	0.043541	47°42.3	64.9	0.042028	48°42.2	64.5	0.040523	49°41.6	64.1
36	0.047585	47°03.4	64.5	0.045973	48°03.6	64.1	0.044367	49°03.4	63.6	0.042769	50°02.7	63.2
37	0.050170	47°25.5	63.7	0.048460	48°25.7	63.2	0.046758	49°25.3	62.8	0.045054	50°24.5	62.4
38	0.052813	47°48.5	62.9	0.051002	48°48.5	62.4	0.049200	49°48.1	61.9	0.047408	50°47.1	61.5
39	0.055512	48°12.2	62.0	0.053597	49°12.1	61.5	0.051692	50°11.6	61.1	0.049798	51°10.5	60.6
40	0.058266	48°36.7	61.2	0.056243	49°36.6	60.7	0.054231	50°35.9	60.2	0.052233	51°34.6	59.8
41	0.061072	49°02.1	60.3	0.058938	50°01.8	59.8	0.056816	51°00.9	59.3	0.054711	51°59.5	58.9
42	0.063929	49°28.4	59.4	0.061680	50°27.9	58.9	0.059446	51°26.9	58.4	0.057229	52°25.2	58.0
43	0.066835	49°55.5	58.5	0.064468	50°54.9	58.0	0.062117	51°53.6	57.5	0.059787	52°51.7	57.1
44	0.069787	50°23.5	57.6	0.067299	51°22.7	57.1	0.064829	52°21.2	56.6	0.062381	53°19.1	56.1
45	0.072784	50°52.4	56.7	0.070170	51°51.4	56.2	0.067578	52°49.7	55.7	0.065010	53°47.2	55.2

L et D de MEME NOM

B = A — D

Si D plus petit que A : Z = Za + zb

Si D plus grand que A : Z = Zb — Za

L et D de NOM CONTRAIRE

B = A + D

Z = Za + Zb

Toujours du pôle élevé

...d'une table de 10 pages des logarithmes des sinus et cosinus de minutes en minutes

SINUS	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	
00	0.465948	0.445671	0.426425	0.408122	0.390687	0.374052	0.358158	0.342953	0.328391	0.314429	60
01	0.466001	0.445342	0.426112	0.407824	0.390403	0.373781	0.357899	0.342705	0.328153	0.314201	59
02	0.465255	0.445013	0.425800	0.407527	0.390120	0.373510	0.357640	0.342458	0.327916	0.313973	58
03	0.464908	0.444685	0.425488	0.407230	0.389836	0.373240	0.357382	0.342210	0.327679	0.313746	57
04	0.464562	0.444359	0.425176	0.406933	0.389553	0.372970	0.357123	0.341963	0.327442	0.313518	56
05	0.464217	0.444029	0.424864	0.406637	0.389271	0.372700	0.356865	0.341716	0.327205	0.313291	55
06	0.463871	0.443701	0.424553	0.406341	0.388988	0.372430	0.356607	0.341469	0.326968	0.313064	54
07	0.463526	0.443374	0.424242	0.406045	0.388706	0.372160	0.356350	0.341222	0.326732	0.312837	53
08	0.463182	0.443047	0.423931	0.405749	0.388424	0.371891	0.356092	0.340975	0.326495	0.312611	52
09	0.462837	0.442720	0.423621	0.405453	0.388142	0.371622	0.355835	0.340729	0.326259	0.312384	51

et d'une table de 9 pages de compléments d'azimut (Zb)

	HAUTEURS ESTIMÉES														
	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
B															
1	01.2	01.2	01.2	01.2	01.2	01.2	01.3	01.3	01.3	01.3	01.3	01.3	01.4	01.4	01.4
2	02.3	02.4	02.4	02.4	02.4	02.5	02.5	02.5	02.6	02.6	02.7	02.7	02.7	02.8	02.8
3	03.5	03.5	03.6	03.6	03.7	03.7	03.8	03.8	03.9	03.9	04.0	04.0	04.1	04.2	04.2
4	04.7	04.7	04.8	04.8	04.9	04.9	05.0	05.1	05.1	05.2	05.3	05.4	05.5	05.6	05.7
5	05.8	05.9	06.0	06.0	06.1	06.2	06.3	06.4	06.4	06.5	06.6	06.7	06.8	07.0	07.1
6	07.0	07.1	07.2	07.2	07.3	07.4	07.5	07.6	07.7	07.8	08.0	08.1	08.2	08.4	08.5
7	08.2	08.3	08.4	08.5	08.6	08.7	08.8	08.9	09.0	09.2	09.3	09.4	09.6	09.8	09.9
8	09.3	09.4	09.6	09.7	09.8	09.9	10.0	10.2	10.3	10.5	10.6	10.8	11.0	11.2	11.4
9	10.5	10.6	10.8	10.9	11.0	11.1	11.3	11.5	11.6	11.8	12.0	12.2	12.4	12.6	12.8
10	11.7	11.8	11.9	12.1	12.2	12.4	12.6	12.7	12.9	13.1	13.3	13.5	13.7	14.0	14.2
11	12.9	13.0	13.2	13.3	13.5	13.6	13.8	14.0	14.2	14.4	14.6	14.9	15.1	15.4	15.7
12	14.0	14.2	14.4	14.5	14.7	14.9	15.1	15.3	15.5	15.7	16.0	16.2	16.5	16.8	17.1
13	15.2	15.4	15.6	15.7	15.9	16.1	16.4	16.6	16.8	17.1	17.3	17.6	17.9	18.2	18.5
14	16.4	16.6	16.8	17.0	17.2	17.4	17.6	17.9	18.1	18.4	18.7	19.0	19.3	19.7	20.0
15	17.6	17.8	18.0	18.2	18.4	18.7	18.9	19.2	19.5	19.7	20.1	20.4	20.7	21.1	21.5

La méthode oblige à modifier la position estimée pour obtenir un angle au pôle rond, mais l'ouvrage est de petite taille (65 pages) et couvre tous les cas possibles sauf les hauteurs négatives qui, en principe, ne sont pas utiles pour la navigation maritime.

*

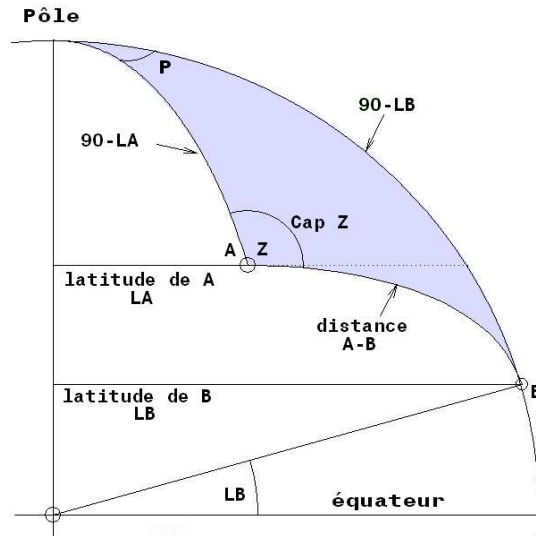
Les tables de Friocourt ou de Dieumegard ne nécessitent pas de changer sa position estimée pour effectuer les calculs de hauteur estimée. Mais l'azimut n'est pas donné aussi simplement que dans les méthodes HO-249 ou de Balta.

L'orthodromie

Naviguer en orthodromie signifie parcourir la distance la plus courte entre deux points **A** et **B** sur la sphère terrestre. On conçoit sans faire de démonstration complexe que ce trajet se fera sur un arc de grand cercle passant par **A** et **B**.

Autrement dit, nous avons à résoudre notre triangle sphérique avec les données dont nous disposons :

- Latitude et longitude du point **A**
- Latitude et longitude du point **B**



On commence par calculer la valeur de l'angle au pôle **P** qui est la différence entre les longitudes de **A** et de **B**. Ensuite on considère que la latitude du point d'arrivée **B** est comme la déclinaison dans notre calcul des droites de hauteur soit **LB = D**

Attention le calcul de la hauteur **H** (distance **A-B**) donne la valeur de 90-H. on devra donc en tenir compte en prenant le cos H au lieu de sin H en utilisant la formule du calcul de la hauteur H :

$$\cos H = \cos P \times \cos L \times \cos D + \sin L \times \sin D$$

lorsque la latitude et la déclinaison sont de même nom, sinon :

$$\cos H = \cos P \times \cos L \times \cos D - \sin L \times \sin D$$

CosH sera la distance **A-B** exprimée en degrés et minutes qu'il faudra convertir en milles (en minutes d'arc ou en km : minutes x 1,852).

Le cap matérialisé par Z variera tout au long de la route... par rapport au pôle, le pôle géographique.

Exemples

1 - Quelle est la distance « à vol d'oiseau » entre Paris et Bordeaux et quel cap faut-il prendre au départ en suivant une route orthodromique ?

Position de départ à Paris (N.D.) 48°51' N et 2°21' E

Position d'arrivée à Bordeaux 44°50' N et 0°36' W

Différence de longitude : 2°21' + 0°36' = 2°57'

soit l'angle au pôle **P = 2°57' (2,95°)**

On prend la position de départ à Paris, latitude :

L = 48°51' N (48,850)

Et pour déclinaison : latitude d'arrivée à Bordeaux :

D = 44°50' N (44,8333°)

L et D sont de même nom donc :

$$\cos H = \cos P \times \cos L \times \cos D + \sin L \times \sin D$$

on trouve H = 4,5918°.

En km : 4,5918 x 60 x 1,852 = **510 km**

Le cap au départ : nous avons vu que :

$$\sin Z = \frac{\sin P \times \cos D}{\sin H} = 27,12^\circ$$

Orienté vers le sud : $180^\circ - 27,12^\circ = 152,88^\circ$ vers l'ouest, c'est-à-dire $360^\circ - 152,88^\circ = \mathbf{207^\circ}$ au compas

2 – Quelle est la distance à vol d'oiseau de Paris à Cayenne ?

Position de départ à Paris (N.D.) $48^\circ 51' \text{ N}$ et $2^\circ 21' \text{ E}$

Position d'arrivée à Cayenne $4^\circ 56' \text{ N}$ et $52^\circ 19' \text{ W}$

Différence de longitude : $2^\circ 21' + 52^\circ 19' = 54^\circ 40'$

Soit **P = $54,6666^\circ$**

L = $48^\circ 51' \text{ N}$ ($48,850$)

D = $4^\circ 56' \text{ N}$ ($4,93333^\circ$)

L et D sont de même nom donc :

$$\cos H = \cos P \times \cos L \times \cos D + \sin L \times \sin D$$

on trouve $H = 63,6466^\circ$

En km : $63,6466 \times 60 \times 1,852 = \mathbf{7072 \text{ km}}$

Le cap au départ : (orthodromie)

$$\sin Z = \frac{\sin P \times \cos D}{\sin H} = 65,10^\circ$$

Orienté vers le sud : $180^\circ - 65,10^\circ = 115^\circ$ vers l'ouest, c'est-à-dire $360^\circ - 115^\circ = \mathbf{245^\circ}$ au compas

3 - Quelle est la distance à vol d'oiseau de Paris à St Denis de la Réunion ?

Position de départ à Paris (N.D.) $48^\circ 51' \text{ N}$ et $2^\circ 21' \text{ E}$

Position d'arrivée à St Denis $20^\circ 53' \text{ S}$ et $55^\circ 29' \text{ E}$

Différence de longitude : $55^\circ 29' - 2^\circ 21' = 53^\circ 08'$

Soit **P = $53,1333^\circ$**

L = $48^\circ 51' \text{ N}$ ($48,850$)

D = $20^\circ 53' \text{ N}$ ($20,88333^\circ$)

L et D sont de nom contraire donc :

$$\cos H = \cos P \times \cos L \times \cos D - \sin L \times \sin D$$

on trouve $H = 84,23^\circ$

En km : $84,23^\circ \times 60 \times 1,852 = \mathbf{9360 \text{ km}}$

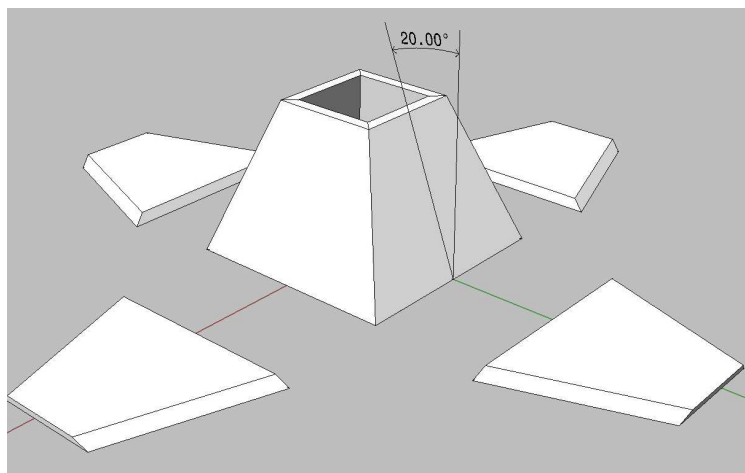
Le cap au départ : (orthodromie)

$$\sin Z = \frac{\sin P \times \cos D}{\sin H} = 48,70^\circ$$

Orienté vers le sud : $180^\circ - 48,70^\circ = 131^\circ$ vers l'est,
c'est-à-dire = **131°** au compas.

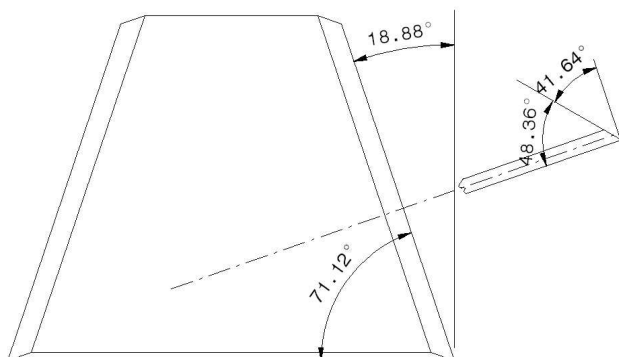
Application de la trigonométrie sphérique..

Par exemple, nous désirons réaliser un tronc de pyramide constitué de 4 panneaux assemblés à coupes d'onglet avec une pente de 20° comme figuré :



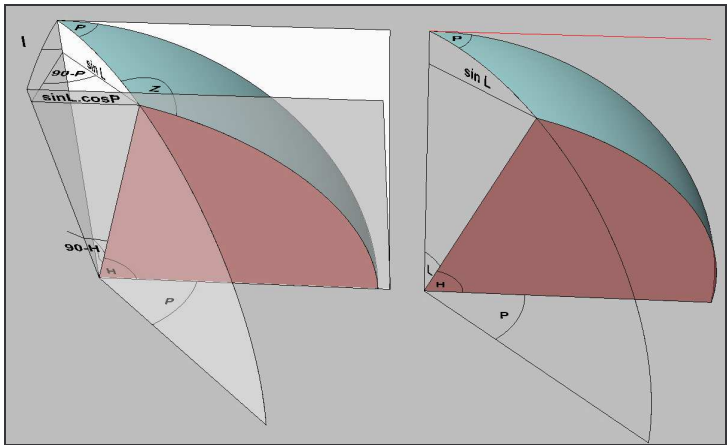
La base est un carré avec des coupes d'onglet à 45° dessinées sur le sol.

Quels devront être les angles de coupe ?

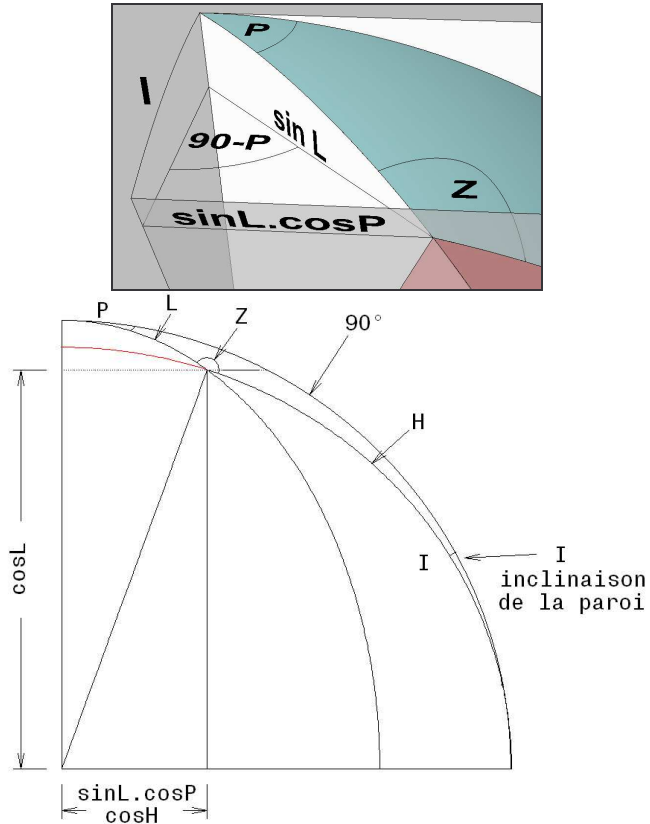


Voyons quelles sont nos déductions trigonométriques.

On prend comme angle au pôle le plan de coupe à 45° (**P**) mesuré par rapport au sol. Puis, on bascule la paroi de 20° (**I**) comme sur cette image :



En bleu :
notre triangle sphérique
En rouge :
notre façade inclinée de **I** (20°)
avec l'angle de coupe **H** ($71,12^\circ$)



On connaît :

- $P = 45^\circ$: le plan de l'onglet, $90^\circ / 2 = 45^\circ$
- $I = 20^\circ$ angle de bascule d'une paroi. (ici basculée vers nous)
- Le côté extérieur à 90° ($\sin 90^\circ = 1$)

On cherche ;

- H (71.12°)
- Z (48.36°)

Selon la règle des sinus :

$$\frac{\sin P}{\sin H} = \frac{\sin I}{\sin L} \quad (1)$$

on sait également que $\cos H = \sin L \times \cos P$ comme illustré sur l'image ci-dessus.

$$\cos H = \sin L \times \cos P \Rightarrow \sin L = \frac{\cos H}{\cos P}$$

$$\text{en reprenant (1) : } \frac{\sin P}{\sin H} = \frac{\sin I \times \cos P}{\cos H}$$

$$\frac{\sin H}{\cos H} = \frac{\sin P}{\sin I \times \cos P} \Rightarrow \tan H = \frac{\tan P}{\sin I} \quad [\sin/\cos = \tan]$$

$$\tan H = \frac{\tan(45)}{\sin 20} = \frac{1}{0,3420} = 2,9238$$

$$\mathbf{H} = \arctan 2,9238 = 71,118^\circ \text{ soit } \mathbf{71,12^\circ}$$

$$\text{ou bien : } 90 - 71,12 = 18,88^\circ$$

Angle du chant : Z

$$\frac{\sin P}{\sin H} = \frac{\sin Z}{1} \quad \text{soit} \quad \sin Z = \frac{\sin 45}{\sin 71,12} = 0,7473$$

$$\mathbf{Z} = \arcsin 0,7473 = \mathbf{48,36^\circ} \text{ (ou } -180 : 131,64^\circ)$$

La formule est valable pour toutes les combinaisons d'assemblages, avec des angles au choix, par exemple des « pyramides » à 5, 6 ou 8 côtés.....

